２０２５年４月入学
千葉大学大学院融合理工学府博士前期課程
一般選抜 学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目（１）

検査時間　１２０分

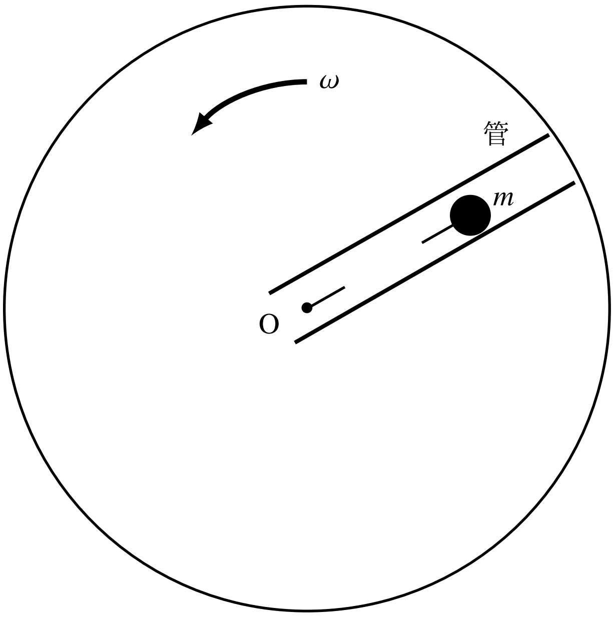
注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で４ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。1 枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，問題 I, II のそれぞれについて 1 枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙に，問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない)。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

図のように，水平に置かれた円板上で，バネの一端が円板の中心 O に取り付けられ，他端には質点がつながれている。バネの周囲は円板に固定された管で取り囲まれており，バネがたわむことはない。質点の質量を m, バネの自然長を ℓ, バネ定数を k とし $\Omega = \sqrt{k/m}$ とおく (以降，k を用いないこととし，代わりに Ω で表す)。バネの質量，摩擦や空気抵抗は無視できるものとする。円板を O の周りに一定の角速度 ω で回転させたとき，質点がどのような運動をするか考えよう。ただし，バネの伸びは Hooke の法則に従い，質点が管や円板から飛び出ることのない範囲のみ考えることとする。

時刻 t における O から質点までの距離を $r(t)$ とおき，初期条件を $r(t=0) = r_0, \dot{r}(t=0) = 0$ とする。



(真上から見た図)

A. まず，$r(t)$ の振舞いを調べよう。

1. 質点の運動エネルギーを r と $\dot{r}$ を用いて表しなさい。また，ポテンシャル $U(r)$ を書きなさい。

2. r に関する運動方程式を作りなさい。

3. $0 < \omega < \Omega$ の場合について，運動方程式を解いた上で，質点がどのような運動をするか言葉で述べなさい。

4. $\omega > \Omega$ の場合について，運動方程式を解いた上で，質点がどのような運動をするか言葉で述べなさい。

5. $\omega = \Omega$ の場合について，運動方程式を解いた上で，質点がどのような運動をするか言葉で述べなさい。

B.　次に，質点が管から受ける垂直抗力 (その水平面内の成分) を求めたい。質点が必ずしも管の中にあると限らないとし，管の中にあることを拘束条件として扱うことにより，Lagrange 力学に基づいてその抗力を求めることができる。

6. O を原点とし円板と共に回転する直交座標系を (x, y) で表す。同じく O を原点とした静止座標系 (X, Y) が (x, y) を用いて

$$X = x\cos\omega t - y\sin\omega t, \quad Y = x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

と表せることから，(x, y) を質点の位置として，その (静止座標系で見た) 運動エネルギーを $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ により表しなさい。

x 軸を管の方向に一致させる。このとき，質点の位置 $\big(x(t), y(t)\big)$ のうち，$x(t)$ は **A.** で扱った $r(t)$ にほかならない。他方，質点が管の中にあるため $y(t) = 0$ が成り立つ。

7. $y = 0$ を拘束条件とし，未定乗数を λ として Lagrange の未定乗数法を用いて，x, y に関する運動方程式を導きなさい。

8. 運動方程式のうち λ を含む項が抗力に対応することに留意して，$\omega = \Omega$ の場合について，抗力の大きさを t の関数として求めなさい。

9. この質点が電荷 q を持っているとする。円板に垂直な向き ($+z$ 方向) に一様な静磁場 B を加えることにより，質点が管から受ける抗力を 0 にしたい。このような B を求めなさい。なお，運動に伴う質点からの電磁波放射は無視してよい。

II

A.

独立な N 個 (N は膨大な数) の局在した電子が z 方向の一様静磁場中におかれている状況を考える。電子の運動は無視できて，各電子スピンに対するハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{spin}} = -2\mu_{\mathrm{e}} H \hat{S}^z = -\mu_{\mathrm{e}} H \sigma^z \tag{1}$$

とする。$H > 0$ は一様磁場，$\mu_{\mathrm{e}} > 0$ は電子スピンの磁気モーメント，$\hat{S}^z = \frac{1}{2}\sigma^z$ は電子スピン演算子の z 成分，σ^z はパウリ行列の z 成分である (スピンは無次元で定義している)。σ^z は ± 1 の固有値を持ち，固有値 $+1(-1)$ に対応するエネルギー固有状態がスピンアップ (スピンダウン) 状態である。以下，一様磁場 H 中の独立な N 個の電子スピン系において，温度 T の平衡状態を考える。ボルツマン定数は k_{B} とする。注釈：本来，電子スピンの正負の向きと磁気モーメントの向きは逆であるが，ここでは両者の符号は等しいとして電子スピンを定義している。

1. 電子スピン 1 つの分配関数を求めよ。

2. 電子スピン 1 つのヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。

3. 全電子スピンの磁化 $M = N\langle \hat{S}^z \rangle$ を求めよ。ここで $\langle \cdots \rangle$ は温度 T の熱平衡状態における期待値を表す。

4. 磁場の値が $H = H_0 > 0$ のとき，電子スピン系全体の帯磁率 $\chi(H_0) = \frac{\partial M}{\partial H}|_{H \to H_0}$ を求めよ。

5. 帯磁率 $\chi(H)$ の低温極限 $k_{\mathrm{B}}T \ll \mu_{\mathrm{e}} H$ と高温極限 $k_{\mathrm{B}}T \gg \mu_{\mathrm{e}} H$ での値を評価し，その結果から帯磁率 $\chi(H)$ の概形を温度の関数として描け。磁場 $H > 0$ は固定する。

B.

続いて，3 次元自由電子ガスモデルの磁性を考える。z 方向の一様磁場 H 中の自由電子ガスにおいて，スピンアップで波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ を持つ電子のエネルギー固有値 $\epsilon(\boldsymbol{k})_+$ とスピンダウンで波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を持つ電子のエネルギー固有値 $\epsilon(\boldsymbol{k})_-$ は

$$\epsilon(\boldsymbol{k})_{\pm} = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m} \mp \mu_{\mathrm{e}} H \tag{2}$$

で与えられると仮定する。右辺第 1 項は運動エネルギーを表しており，m は電子の質量，$\hbar$ はディラック定数である。第 2 項は磁場 $H > 0$ によるゼーマン相互作用を表している。自由電子ガスを金属中伝導電子のモデルと想定すると，通常，フェルミエネルギー ϵ_{F} はゼーマンエネルギー $\mu_{\mathrm{e}} H$ に比べて極めて大きい。以下，低温 ($k_{\mathrm{B}}T \ll \epsilon_{\mathrm{F}}$) かつ低磁場 ($\mu_{\mathrm{e}} H \ll \epsilon_{\mathrm{F}}$) の条件の下，温度 T、化学ポテンシャル μ の平衡状態にある自由電子ガスの磁化と帯磁率を解析する。まず問 **6.** から問 **8.** までは，ゼロ磁場におけるスピン自由度のない自由電子ガスを考える。

6. エネルギー固有値 $\epsilon(\boldsymbol{k}) = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}$ をもつ波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の自由電子に対する大分配関数 $\Xi_{\boldsymbol{k}}$ を $k_{\mathrm{B}}T$，μ，$\epsilon(\boldsymbol{k})$ の関数として求めよ。

7. 上の問題と同じ波数 $\boldsymbol{k}$ の自由電子の粒子数期待値 $\langle \hat{n}_{\boldsymbol{k}} \rangle_{\mathrm{gc}}$ を $k_{\mathrm{B}}T$，μ，$\epsilon(\boldsymbol{k})$ の関数として求めよ。$\hat{n}_{\boldsymbol{k}}$ は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の電子の数演算子，$\langle \cdots \rangle_{\mathrm{gc}}$ はグランドカノニカル分布における期待値を意味する。

8. エネルギー固有値 $\epsilon(\boldsymbol{k}) = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}$ をもつ波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の自由電子の 1 粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。系は辺の長さ L で体積 $V = L^3$ の立方体であり，波数ベクトルの各成分の取り得る値は $k_\alpha = \frac{2\pi}{L} n_\alpha$ とし ($\alpha = x, y, z$ であり，n_α は整数)，熱力学極限を考える。

上の結果から，熱力学極限におけるスピン自由度のない自由電子ガスの全電子数 N は，状態密度を用いて $N = \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon) D(\epsilon)$ と表すことができる。ここで，ϵ は各電子のエネルギー，$f(\epsilon) = 1/(e^{(\epsilon-\mu)/(k_{\mathrm{B}}T)} + 1)$ はフェルミ分布関数である。以下の問 **9.** から，熱力学極限における一様磁場 ($H > 0$) 中のスピン自由度を持つ自由電子ガスを考える。以下の問いでは，$D(\epsilon)$ やその微分 $D'(\epsilon) = \frac{dD}{d\epsilon}$ を解答に用いてよい。

9. スピンアップ電子とスピンダウン電子それぞれの 1 粒子状態密度 $D_+(\epsilon)$ と $D_-(\epsilon)$ は

$$D_\pm(\epsilon) = D(\epsilon \pm \mu_{\mathrm{e}} H) \tag{3}$$

で与えられる。従って，スピンアップの全電子数は $N_+ = \int_{-\mu_{\mathrm{e}} H}^\infty d\epsilon f(\epsilon) D_+(\epsilon)$，スピンダウンの全電子数は $N_- = \int_{\mu_{\mathrm{e}} H}^\infty d\epsilon f(\epsilon) D_-(\epsilon)$ と書ける。磁場 H が十分小さいとして，磁化 $M = \frac{1}{2}(N_+ - N_-)$ を磁場 H の多項式で表したときの最も主要な項を求めよ。エネルギーについての積分 $\int_0^\infty d\epsilon(\cdots)$ を使って表現してよい。

10. フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ と微分可能な関数 $g(\epsilon)$ の積の積分について，十分低温 ($k_{\mathrm{B}}T \ll \epsilon_{\mathrm{F}}, \mu$) において以下の公式が成り立つ。

$$\int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon) g(\epsilon) = \int_0^\mu d\epsilon g(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 g'(\mu) + O((k_{\mathrm{B}}T)^4) \tag{4}$$

ここで g' は関数 g の 1 階微分である。また十分低温における化学ポテンシャルは $\mu = \epsilon_{\mathrm{F}} + C_0 (k_{\mathrm{B}}T)^2$ で近似できて (C_0 は定数)，$(k_{\mathrm{B}}T)^2$ に比例する第 2 項は ϵ_{F} に比べて極めて小さい。以上のことから，低磁場かつ低温における磁化 M を磁場 H と温度 T の多項式として表現したときの最も主要な項を求めよ。

11. ゼロ磁場極限 $H \to 0$ において，**A.** で考えた局在電子スピン系と **B.** で考えた自由電子ガス系の帯磁率 $\chi(0) = \frac{\partial M}{\partial H}|_{H\to 0}$ を比較しよう。十分低温で，両モデルの帯磁率の温度依存性の違いを述べよ。