平成３０年度
融合理工学府　博士前期課程　学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目(1) (物理学)

試験時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。

2. 問題は全部で3ページある。

3. 問題 I, II の両方に解答すること。

4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。1枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない．また，問題 I, II のそれぞれについて1枚以上の解答用紙を提出すること。

5. 全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を記入すること(氏名を記入してはいけない)。

6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

半径 a の円柱導体 A と半径 $b\,(a<b)$ の厚さの無視できる円筒導体 B が z 軸を中心とし, 図 1 のように真空中に置かれている。この導体 A, B の長さは l で, 十分に長い $(l \gg b)$。 z 軸からの距離を r で表す。また, 真空の誘電率を ϵ_0, 真空の透磁率を μ_0 とし, 内部導体 A に単位長あたりに蓄えられている正の電気量を $+q$, 外部導体 B に単位長あたりに蓄えられている負の電気量を $-q$ とする。

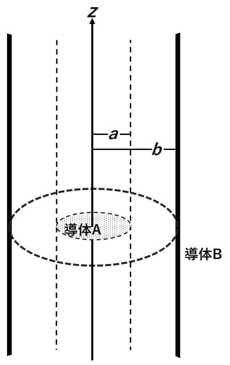


図 1

1. z 軸からの距離 $r\,(a<r<b)$ の点の電場の向きを, z 軸に垂直な平面上の導体の断面を描き, 図示せよ。また, その大きさを求めよ。

2. 導体 A, B からなるコンデンサの単位長さあたりの容量を求めよ。

3. 導体 A, B の電位を一定に保ったまま, 誘電率 ϵ の誘電体を導体 AB 間に詰める。このときコンデンサに蓄えられるエネルギー W は誘電体を詰める前のエネルギー W_0 の何倍になるか答えよ。

4. 再び導体 AB 間は真空とし, 時刻 $t=0$ で、導体 A, B に抵抗 R_0 をつなぐ。 この抵抗に流れる電流を時間の関数として求めよ。

図 2 のように, 前問の導体 A, B に互いに反対方向の電流 $I(I>0)$ を導体内で一様に流す。ただし、 内部導体 A に流れる電流 I は $+z$ 方向に流れる。導体 AB 間は真空とする。

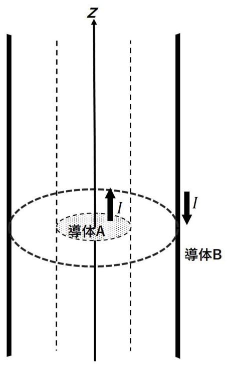


図 2

5. 導体 A と B との間にある z 軸からの距離が $r\,(a < r < b)$ の点の磁場の向きを, z 軸に垂直な平面上の導体の断面を描き, 図示せよ。

6. z 軸からの距離 r が以下の位置での磁束密度の大きさを求めよ。

(1) $r \leq a$

(2) $a < r < b$

(3) $b < r$

7. このときの単位長さあたりの磁場のエネルギー U を求めよ。

8. U は単位長さあたりのインダクタンス L を用いて $U = LI^2/2$ で表される。L を求めよ。

II　簡単のため, 定数は正とする。

1. x 軸上における質点の運動を扱う。

(1) 運動方程式が

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2 x(t) + F_0 \cos \mathit{\Omega} t \qquad (\mathrm{i})$$

の場合を考える。ω, $\mathit{\Omega}$, F_0 は定数であり $\mathit{\Omega} \neq \omega$ とする。

- $\ddot{x}_0 = -\,\omega^2 x_0$ の一般解 $x_0(t)$ は $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の線型結合で表せる。
- $\mathit{\Omega} \neq \omega$ の場合, $\cos \mathit{\Omega} t$ に比例する (i) の特解 $X(t)$ が存在する。
- (i) の一般解 $x(t)$ は $x(t) = x_0(t) + X(t)$ になる。

以上のことを踏まえて $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ を満たす $x(t)$ を求めよ。

(2) **(1)** で求めた $x(t)$ を利用して, $\mathit{\Omega} \to \omega$ での $x(t)$ を求めよ。

(3) (i) を一般化して

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2 x(t) + F(t) \qquad (\mathrm{ii})$$

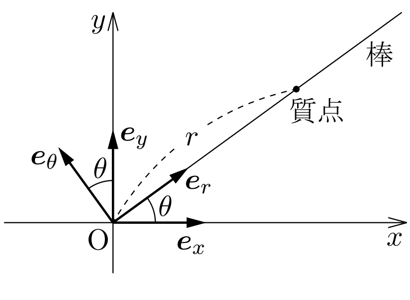
とする。$F(t)$ は任意の与えられた関数である。(ii) の特解 $X(t)$ を

$$X(t) = A(t) \sin \omega t + B(t) \cos \omega t\,, \quad \text{ただし} \quad \frac{dA}{dt} \sin \omega t + \frac{dB}{dt} \cos \omega t = 0$$

とおく。dA/dt と dB/dt を求めよ。

(4) F_0 を定数として $F(t) = F_0\,\delta(\omega t - 2\pi)$ の場合, **(3)** の結果を用いて $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ である $x(t)$ を求めよ。

2. xy 平面上で, 一端が原点 O に固定され O のまわりに一定の角速度 ω で回転する棒に, 質量 m の質点が滑らかに束縛されている。質点の極座標 (r, θ) と単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を図のようにとる。$\dot{\theta} = \omega$ であり, $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ は定ベクトルである。質点には中心力ポテンシャル $V(r)$ が作用する。また, 棒に垂直な束縛力 $\boldsymbol{R}$ も働く。質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると, 運動方程式は



$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\,\boldsymbol{\nabla} V(r) + \boldsymbol{R}$$

である。

(1) $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, θ で表せ。これらを t で微分することにより $\dot{\boldsymbol{e}}_r$, $\ddot{\boldsymbol{e}}_r$ を $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, ω で表せ。

(2) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ と表せる。$\boldsymbol{e}_r$ 方向の運動方程式から $r(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(3) $H = m\dot{\boldsymbol{r}}^2/2 + V(r) + f(r)$ とする。$\dot{H} = 0$ になる $f(r)$ を求めよ。

(4) k, V_0 を定数として $V(r) = V_0 r^k$ のとき, $r(t)$ が一定値 r_0 を中心に微小振動するための k の条件を求めよ。また, 微小振動の角振動数 $\mathit{\Omega}$ を k, ω で表せ。

平成３０年度
融合理工学府　博士前期課程　学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目 (2) (物理学)

試験時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で 4 ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。1 枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない．また，問題 I, II のそれぞれについて 1 枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を記入すること (氏名を記入してはいけない)。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

N 個の大きさ 1/2 のスピンを一様な磁場 H がある空間に固定する。この系の熱平衡状態をカノニカル分布を用いて考察する。

まず，スピン間に相互作用がはたらかない場合を考える。それぞれのスピンに $j = 1, 2, \ldots, N$ と番号をつけ，その状態をスピン変数 $\sigma_j = \pm 1$ で指定すると，系のエネルギー固有値は

$$E(\sigma_1, \cdots, \sigma_N) = -\mu H \sum_{j=1}^{N} \sigma_j$$

で与えられる。μ は正の定数である。

1. 分配関数

$$Z(\beta, N) = \sum_{(\sigma_1, \cdots, \sigma_N)} e^{-\beta E(\sigma_1, \cdots, \sigma_N)}$$

を求めよ。β は逆温度 $(kT)^{-1}$，　k は Boltzmann 定数である。

2. 磁化 $m = \dfrac{\mu}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \sigma_j$ の期待値 $\langle m \rangle_{\beta,H}$ を求めよ。また，磁化率

$$\chi(\beta) = \lim_{H \to 0} \frac{\langle m \rangle_{\beta,H}}{H}$$

を求めよ。

3. 自由エネルギー $F(\beta, N) = -\dfrac{1}{\beta} \log Z(\beta, N)$ とエントロピー $S(T, N)$ を求めよ。

4. エネルギー $U(T, N)$ と熱容量 $C(T, N) = \dfrac{\partial U(T, N)}{\partial T}$ を求めよ。また，熱容量の低温と高温の極限の漸近形を求めよ。

次に，隣り合う番号のスピンが 2 つずつ組になって相互作用している場合を考える。系のエネルギー固有値は

$$E(\sigma_1, \cdots, \sigma_N) = J \sum_{j=1}^{N/2} \sigma_{2j-1} \sigma_{2j} - \mu H \sum_{j=1}^{N} \sigma_j$$

で与えられる。J は定数である。

5. $N = 2$ の系について，エネルギー固有値と対応する固有状態 $|\sigma_1, \sigma_2\rangle$ $(\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1)$ を全て求めよ。

以下，N 個のスピンからなる系について考える。ただし，N は偶数であるとする。

6. 分配関数 $Z(\beta)$ を求めよ。

7. 一つのスピン変数の期待値 $\langle \sigma_1 \rangle_{\beta,H}$ を求めよ。

8. 磁化率 $\chi(\beta)$ を求めよ。 また，$J > 0$，および $J < 0$ のそれぞれの場合について，低温と高温の極限の漸近形を求め，温度の関数として磁化率のグラフの概形を描け。

空白ページ

II

波動関数 $\psi(x,t)$ が Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \hat{H}\psi(x,t)$$

に従う，直線（x 軸）上を運動する質量 m の量子力学的粒子を考える。

1. 粒子の運動が区間 $(a \leq x \leq b)$ に限定された場合を考える。ハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ が自己共役であることから従う関係式

$$(\psi, \hat{H}\psi) = (\hat{H}\psi, \psi)$$

を用いて，任意の時刻 t で

$$(\psi, \psi) = \int_a^b dx\ |\psi(x,t)|^2 = \text{定数}$$

が成立していることを示せ。ただし，内積を次式で定義する。

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_a^b dx\ \psi_1^*(x,t)\psi_2(x,t)$$

以下の問題では，粒子の運動を半直線上 $(0 \leq x < \infty)$ に限定し，ハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ は次式で与えられる自由粒子のハミルトニアンとする。

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

2. 自由粒子のハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ が自己共役であることから，波動関数 $\psi(x)$ の $x = 0$ での値 $\psi(0)$ と波動関数の空間微分 $\psi'(x)$ の $x = 0$ での値 $\psi'(0)$ の間には

$$\psi(0)^*\psi'(0) - \psi'(0)^*\psi(0) = 0$$

の関係があることを示せ。ただし，無限遠点でも同様の関係が満たされているとする。これから，

$$\psi(0) + \ell\psi'(0) = 0 \qquad (\mathrm{i})$$

を満たすある実数 ℓ が存在することがわかる。

[参考：長さの次元を持つ実数 ℓ は量子力学の原理のみからは決まらない不定のパラメーターである。この結果は，量子力学では古典力学では現れない固有のスケールが生じることを意味する。特に，Dirichlet 境界条件 $\psi(0) = 0$ となるのは $\ell = 0$ の場合のみであり，$\ell = \infty$ の場合が Neumann 境界条件 $\psi'(0) = 0$ に対応することに注意せよ。]

3. 時刻 $t = 0$ で $x = x_0 > 0$ の点から原点 $x = 0$ に向かって量子力学的粒子が入射し，原点 $x = 0$ で反射して $x > 0$ の方向に進む現象を考える。

まず，簡単のため，平面波が入射して反射する場合を考える。運動量 $\hbar k$，エネルギー E_k の入射平面波の波動関数 ψ_k^{in} を

$$\psi_k^{\mathrm{in}}(x,t) = \psi_k^{\mathrm{in}}(x)e^{-iE_k t/\hbar}, \quad \psi_k^{\mathrm{in}}(x) = e^{-ik(x-x_0)}$$

として，以下の問いに答えよ。

(1) 反射波の波動関数 $\psi_k^{\rm out}(x)$ を $\psi_k^{\rm out}(x) = Be^{ikx}$ とし，波動関数 $\psi(x) = \psi_k^{\rm in}(x) + \psi_k^{\rm out}(x)$ が原点で境界条件 (i) を満たすことから，B を k, ℓ, x_0 を用いて表せ。

(2) 前問からわかるように，反射波の波動関数 $\psi_k^{\rm out}$ には位相のずれ δ が生じる，つまり，$B = |B|e^{i\delta}$ となる。位相因子 δ は（ある与えられた ℓ の値に対して）k に依存して決まる。δ を k, ℓ, x_0 を用いて実数として表せ。

次に，波束が入射して反射する場合を考える。波束状態 $\Psi_{\rm in}$ は，運動量 $\hbar k$，エネルギー E_k の平面波 $\psi_k^{\rm in}$ を重ね合わせて以下のように構成する。

$$\Psi_{\rm in}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, w(k)\psi_k^{\rm in}(x)e^{-iE_k t/\hbar}, \quad w(k) = \left(\frac{L^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{L^2}{2}(k-k_0)^2}$$

(3) 入射波束の波動関数 $\Psi_{\rm in}(x,0)$ を具体的に求めよ。
さらに，確率密度 $\rho_{\rm in}(x,0)$ と確率の流れの密度 $J_{\rm in}(x,0)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\rho_{\rm in}(x,0) =& |\Psi_{\rm in}(x,0)|^2, \\ J_{\rm in}(x,0) =& \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi_{\rm in}^*(x,0)\Psi_{\rm in}'(x,0) - \Psi_{\rm in}'^{\,*}(x,0)\Psi_{\rm in}(x,0)\right)\end{aligned}$$

また，波動関数 $\Psi_{\rm in}(x,0)$ と確率密度 $\rho_{\rm in}(x,0)$ の概形を図で示せ。
次の積分公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dX e^{-a(X+iY)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0,\ X, Y \in \mathbb{R})$$

(4) L が十分大きい場合には，波束が $k = k_0$ の近傍に局在しているため，波束で表される粒子の位置座標は, 位相が k の関数として $k = k_0$ で極値となるような x の値 x_p で近似することができる。これから入射波束に対しては，$x_p^{\rm in}$ は時間の関数として

$$\frac{d}{dk}\left[-k(x-x_0) - \frac{1}{\hbar}E_k t\right]\Big|_{k=k_0} = 0 \to x_p^{\rm in} = x_0 - \frac{1}{\hbar}\frac{dE_k}{dk}\Big|_{k=k_0} t$$

と求まる。これを踏まえて，反射波束に対する $x_p^{\rm out}$ を $\hbar, k_0, m, \ell, t, x_0$ を用いて実数として表せ。ただし，ℓ は k に依存しないとしてよい。