平成２８年度
大学院理学研究科博士前期課程　学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目(２)(物理学)

試験時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。

2. 問題は全部で４ページある。

3. 問題 I, II の両方に解答すること。

4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，問題 I, II のそれぞれについて１枚以上の解答用紙を提出すること。

5. 全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない）。

6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

1. 図のように原点を通り z 軸に平行な全長 $2L$ の導線を考える。導線の上端 A および下端 B の座標をそれぞれ $\mathrm{A}(0, 0, L)$，$\mathrm{B}(0, 0, -L)$ とする。導線には大きさ I の一定の電流が z 軸正の向きに流れているので，導線の両端には電荷が現れ，その量は時間とともに変動する。真空の誘電率および透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 とし，x 軸上で導線から距離 r にある点を $\mathrm{P}(r, 0, 0)$ として，以下の問いに答えよ。

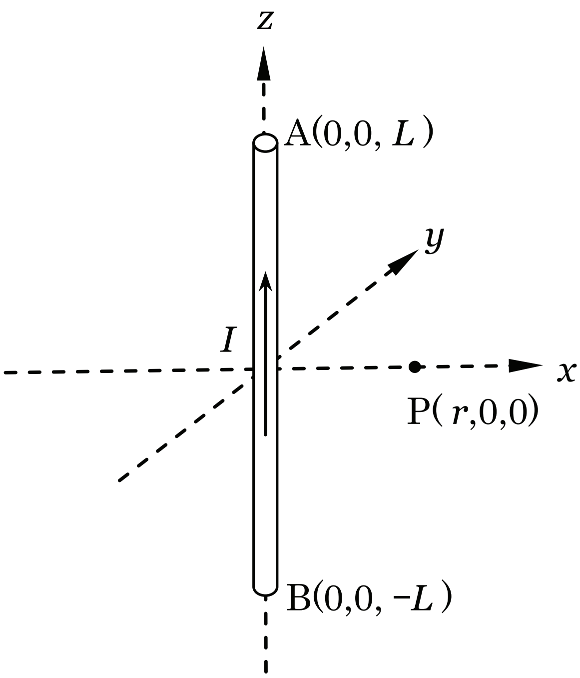
(1) まず，導線は無限に長いものとして，点 P における磁束密度の大きさと向きを，定常電流のアンペールの法則を用いて求めよ。

(2) 図に示した全長 $2L$ の導線に流れる電流 I により点 P に生じる磁束密度の大きさと向きを，ビオ・サバールの法則を用いて求めよ。

(3) 点 A，点 B の位置にそれぞれ電荷 Q，$-Q$ (ただし $Q > 0$) が存在するとき，これらの電荷により点 P に生じる電場の大きさ E と向きを求めよ。

(4) 両端をもつ有限長の導線に大きさ I の一定の電流が流れるとき，両端に現れる電荷により生じる点 P における変位電流（密度）の大きさと向きを求めよ。

(5) 両端をもつ有限長 $2L$ の導線を流れる一定の電流により点 P に生じる磁束密度を，マクスウェル・アンペールの法則を用いて求め，(2) で求めた結果と一致することを示せ。



図

2. 電子と正イオンが電離したまま存在する状態をプラズマ状態といい，プラズマ内に電磁波が入射したときについて考える。以下では，プラズマ内の電子は運動するが，正イオンは動かず，正電荷が一様に分布しているものとして，以下の設問に答えよ。ただし，電子の質量と電荷をそれぞれ m，$-e$，真空の誘電率，透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 とする。また，プラズマ内での透磁率は μ_0 とする。

(1) まず，プラズマ内の1つの電子の運動について考える。この電子に作用する電磁波の電場が $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t$ と表わされるものとして，電子の速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ。ただし，$\boldsymbol{E}_0$ は電場の振幅，ω を電磁波の角振動数とし，$t = 0$ において $\boldsymbol{v} = 0$ であるとする。

ここで，プラズマ内の電子密度を N とすると，運動する電子によって生成されるプラズマ中の電流密度 $\boldsymbol{i}$ は (1) で求めた電子の速度 $\boldsymbol{v}$ を用いて，$\boldsymbol{i} = -Ne\boldsymbol{v}$ で与えられるものとする。

(2) プラズマでは，真空中を電子が運動して伝導電流が生じているが，これを伝導電子の存在しない誘電率 ε の誘電体物質であると見なして，$\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{i} = \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ と表わすことにする。この誘電率 ε を ε_0，ω，ω_{p} を用いて表わせ。ただし，$\omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{\dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$ とする。

真空中の光速を c とすると，$c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ と表わされる。

(3) このプラズマ中での角振動数 ω の電磁波の位相速度を，ε と μ_0 を用いて表わせ。また，真空領域に対するプラズマ領域の屈折率 n が **(2)** の ω，ω_{p} を用いて，$n(\omega) = \sqrt{1 - \dfrac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}}$ と表わされることを示せ。

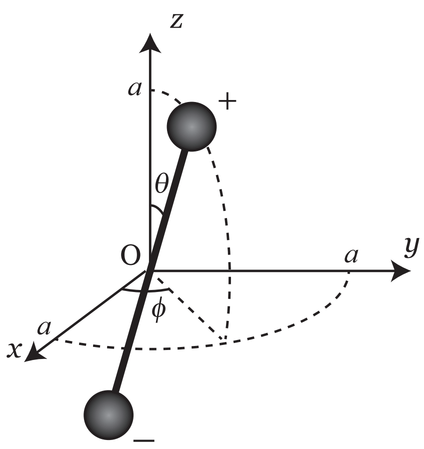
(4) 電磁波が真空側からプラズマ領域に入射するとき，電磁波が全反射する場合がある。これはどのような条件のときに生じるのか，ω と ω_{p} との関係や屈折率 $n(\omega)$ を用いて説明せよ。また，この現象が観測される例を一つあげて，簡潔に説明せよ。

II

図のように，それぞれ正の電荷と負の電荷をもつ質量 m の質点が質量の無視できる長さ $2a$ の剛体棒でつながれていて，その中心の位置が固定されている素子を考える。この素子は十分に大きいため古典統計力学で扱えるとする。素子の状態は固定されている点から正の電荷をもつ質点への向き，すなわち，3 次元極座標を考えたときの角 θ と ϕ で記述できる。また，それぞれの素子は θ に依存したポテンシャル $U(\theta)$ を受ける。この素子 N 個 (N は十分大きいとする) から成る系が，絶対温度 T の熱平衡状態にあるとき，i 番目の素子の座標 θ_i，ϕ_i および共役な運動量 p_{θ_i}，p_{ϕ_i} を用いてハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2I} \left({p_{\theta_i}}^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} {p_{\phi_i}}^2 \right) + U(\theta_i) \right\}$$

と書ける。ただし，$I = 2ma^2$ である。解答には m は用いず I を用いて答えること。



図

まずは，ポテンシャルがない $U(\theta) = 0$ の場合を考える。

1. 分配関数 Z は $\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$（$k_{\mathrm{B}}$ はボルツマン定数）として，

$$Z = \frac{1}{h^{2N}} \prod_{i=1}^{N} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta_i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_i \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_{\theta_i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_{\phi_i} \exp\left(-\beta\mathcal{H}\right)$$

（h はプランク定数）と定義できる。Z を求めよ。公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0)$$

を証明せずに用いてよい。

2. 系の自由エネルギー F，内部エネルギー（ハミルトニアンの期待値）$E = \langle \mathcal{H} \rangle$，エントロピー S，および熱容量 C を求めよ。

次に θ に依存したポテンシャル $U(\theta) = -u_0 \cos\theta$ $(u_0 > 0)$ を受ける場合を考える。

3. このときの分配関数 Z を求めよ。

4. 内部エネルギー E を求めよ。

5. 正の電荷をもつ質点の z 座標の期待値 $\langle z \rangle$ をランジュバン関数 $L(x)$ を用いて表せ。ただし，ランジュバン関数 $L(x)$ は $L(x) = \coth x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\tanh x} - \dfrac{1}{x}$ と定義される。

6. $\langle z \rangle$ が $k_{\mathrm{B}}T \ll u_0$ の極限，および $k_{\mathrm{B}}T \gg u_0$ の極限でどうなるか答えよ。ただし，$|x| \ll 1$ のとき，$L(x) = \dfrac{x}{3} + \mathcal{O}(x^3)$ となることを用いてよい。

7. 内部エネルギー $\langle E \rangle$ を温度 T の関数としてみたときのグラフの概形を描け。$k_{\mathrm{B}}T \ll u_0$ の極限，および $k_{\mathrm{B}}T \gg u_0$ の極限でその傾きがどうなるか答え，その物理的な意味を簡単に説明せよ。ただし，$|x| \ll 1$ のとき，$\tanh x = x - \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$ となることを用いてよい。

θ に依存したポテンシャル $U(\theta) = -u_1 \cos^2\theta$ $(u_1 > 0)$ を受ける場合を考える。

8. この場合，$k_{\mathrm{B}}T \ll u_1$ の極限，および $k_{\mathrm{B}}T \gg u_1$ の極限で，正の電荷をもつ質点の z 座標を $\langle z \rangle$ とするとき，$\langle z \rangle$ および $\langle z^2 \rangle$ の平均値はどうなるか答えよ。なお，厳密な計算によって導出せず，物理的な解釈から議論してよい。