平成２６年度
大学院理学研究科博士前期課程　学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目 (物理学)

試験時間　２４０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。

2. 問題は全部で 7 ページある。

3. 問題 I〜IV 全てに解答すること。

4. 各問題ごとに別の解答用紙を使用すること。1 枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，各問題について 1 枚以上の解答用紙を提出すること。

5. 全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない)。

6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

鉛直平面内の運動を考える。水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとる。質点には鉛直下向きに重力が働く。重力加速度の大きさを g とする。質量 m の質点と x 軸上を運動する質量 M の質点を長さ ℓ の軽い棒でつなぐ。以下の問いに答えよ。

1. 質点 m の x 座標と y 座標を図の $x(t)$ と $\theta(t)$ で表せ。

2. 質点 M と 質点 m からなる系の運動エネルギーを T，位置エネルギーを V とする。T と V を $x(t)$ と $\theta(t)$ を用いて表せ。ただし，$\theta = 0$ のとき $V = 0$ とする。

3. ラグランジアン L は $L = T - V$ である。θ に対するラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

より

$$\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2}\cos\theta = f_1(\theta) \tag{1}$$

となる。$f_1(\theta)$ を求めよ。

4. x に対するラグランジュの運動方程式より

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(x + f_2(\theta)\Big) = 0$$

となる。$f_2(\theta)$ を求めよ。

5. $|\,\theta\,| \ll 1$ の場合，運動方程式で θ の 2 次以上を無視すると θ は $d^2\theta/dt^2 = k\theta$ を満たす。定数 k を求めよ。また，質点 m が棒から受ける力の x 成分 F_x は $F_x = f_x\theta$ と表せる。定数 f_x を求めよ。

以下では，質点 M を強制的に運動させる。このとき，$x(t)$ は与えられた関数となり，(1) は $\theta(t)$ に関する微分方程式となる。$\omega = \sqrt{g/\ell}$ とし $|\,\theta\,| \ll 1$ の場合を考える。

6. $\phi(t) = \displaystyle\int_0^t ds\, \frac{d^2 x(s)}{ds^2}\, G(t-s)$ が (1) の特解になるように $G(t)$ を決めよ。

7. ε を正の定数として $x(t) = \ell\varepsilon\cos\omega t$ とする。$t = 0$ で $\theta = \theta_0$, $d\theta/dt = 0$ を満たす $\theta(t)$ を求めよ。また，$\theta_0 = 0$ のとき $\theta(t)$ の概略を $t \geq 0$ で図示せよ。

II

一様な断面をもった無限に長い導体管（導波管と呼ぶ）の中を伝わる電磁波を考える。導波管は完全導体（電気伝導度無限大）でその中は真空であるとし，真空中の光速度を c，真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 とする。導波管の方向を z 軸にとり，電磁場の z 成分を縦成分，x，y 成分を横成分と呼ぶことにする。次の形の複素数表示の電磁場を考える（実数部分が実際の電磁場を表す）。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)},\qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0(x,y)\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \tag{1}$$

ここで k と ω は正の実数で，$\omega \neq ck$ であるとする。

1. 電荷も電流もない真空中の Maxwell 方程式を書き，電磁波を表す波動方程式を導け。

2. 導波管内の電磁場がヘルムホルツ方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{E}_0=-\gamma^2\boldsymbol{E}_0 \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{B}_0=-\gamma^2\boldsymbol{B}_0 \tag{2}$$

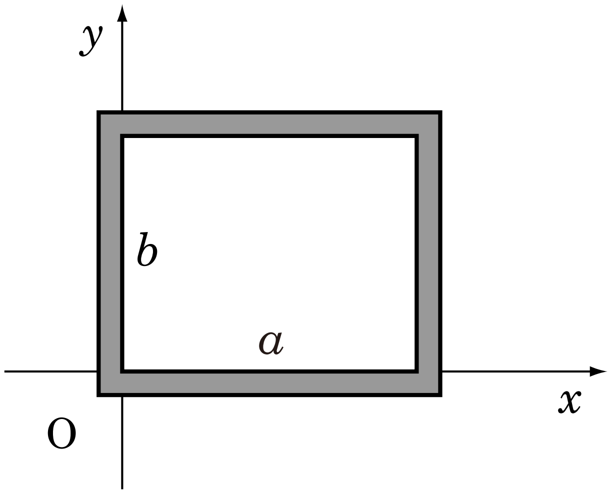
をみたすことを示し，定数 γ^2 を求めよ。

3. (1) 式の電磁場を Maxwell 方程式に代入し，横成分 E_{0x}，E_{0y}，B_{0x}，B_{0y} を，縦成分 E_{0z}，B_{0z} とその微分だけを含む式で表せ。

4. 導波管表面では，磁場の垂直成分と電場の平行成分は 0 である。この境界条件が成り立つ理由を簡単に説明せよ。

3. の結果は，電磁場の縦成分が求まれば，横成分はそれに対応して一意に定まることを示している。そのため，導波管の中の電磁場は，$E_z=0$ の解（TE 波）と $B_z=0$ の解（TM 波）の重ね合わせで書ける。

以下では図のように，2 辺の長さ a，b $(a > b)$ の長方形断面の導波管を伝わる TE 波を考える。



5. (2) のヘルムホルツ方程式を解いて，磁場の縦成分 B_{0z} を求めよ（解を $f(x)g(y)$ の形において変数分離して解け）。また，γ^2 が取り得る値はとびとびになっているが，どのような値が可能か示せ。

上問で求めた異なる γ^2 の値に対応するそれぞれの解をモードと呼ぶ。電磁波の周波数が低くなると，一部のモードは進行とともに減衰する波となり導波管内を伝わることができなくなる。

6. もっとも低い周波数まで導波管内を伝わるのはどのようなモードか答えよ。またこのモードが減衰せずに伝わるために，その周波数はある値 f_c よりも大きくなければならない。この f_c を求めよ。

7. a =22.860mm，b=10.160mm という内径寸法の規格の導波管がある。この中を伝わる TE 波の f_c の値を計算せよ。

8. **6.** のモードについて，位相速度と群速度を角振動数 ω の関数として求め，これらと光速度の大小関係を示せ。

III

以下の問いに答えよ。粒子の質量は m とする。

1. x 座標を導入して，1 次元の井戸型ポテンシャル

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ V_0 & (x \leq 0, x \geq L) \end{cases}$$

によって束縛される粒子の 1 次元の運動を考える。

(1) 領域 $0 < x < L$ で，Schrödinger 方程式を書き下し，$V_0 \to \infty$ の極限で，それを解いて，エネルギー準位 E_n と対応する波動関数 $\psi_n(x)$ を求めよ。ただし，波動関数の規格化因子を具体的に求める必要はない。

(2) エネルギーの最も低い準位とその 2 つ上までの準位に対する波動関数のグラフの概形を書け。

2. 半径 R の円周上に束縛された自由粒子（すなわちポテンシャルがゼロ）の運動を考える。

(1) 円周に沿って y 座標 $(-\pi R \leq y \leq \pi R)$ を導入して，Schrödinger 方程式を書き下し，それを解いて，エネルギー準位 E_ℓ と対応する波動関数 $\phi_\ell(y)$ を求めよ。波動関数に対する境界条件として周期的条件

$$\phi(y + 2\pi R) = \phi(y)$$

を採用する。ただし，波動関数の規格化因子を具体的に求める必要はない。

(2) 各エネルギー準位の縮退度を答えよ。そうなる物理的説明（理由）を与えよ。

3. 前問 **1.** および **2.** を踏まえて，長さ L，半径 R の円筒上に束縛された自由粒子の運動を考える。

(1) Schrödinger 方程式を書き下し，それを解いて，エネルギー準位 $E_{n,\ell}$ と対応する波動関数 $\Psi_{n,\ell}(x, y)$ $(0 \leq x \leq L,\ -\pi R \leq y \leq \pi R)$ を求めよ。ただし，波動関数の規格化因子を具体的に求める必要はない。

(2) R が L に比べて十分小さいならば，この 2 次元系の低エネルギー準位を調べても，長さ L の 1 次元系と区別できない（すなわち，丸まった余剰次元は見えない）ことを説明せよ。

4. (1) 一般的なポテンシャル $U(x)$ を持つ 1 次元量子力学系のハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$$

この H が

$$\begin{aligned} H =& A^\dagger A + E_g, \\ A =& -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{\hbar}W'(x)\right), \quad A^\dagger = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{\hbar}W'(x)\right) \end{aligned}$$

と一致するために成立すべき $U(x)$ と $W(x)$（あるいは $W'(x), W''(x)$）の間の関係を求めよ。ここで，$W'(x)$ と $W''(x)$ は，それぞれ，ある実関数 $W(x)$ の 1 階と 2 階の導関数である。演算子 $A^\dagger$ は演算子 A のエルミート共役である。E_g は基底状態のエネルギーである。

(2) 基底状態の波動関数 $\psi_g(x)$ は方程式

$$A\psi_g(x) = 0$$

を満たすことを示せ。また，それを解いて $\psi_g(x)$ を $W(x)$ を用いて表せ。

(3) 1 次元では，束縛状態のエネルギースペクトルは常に非縮退である。すなわち，同じエネルギー固有値を持つ二つの固有関数 ψ_1, ψ_2 は線形独立ではなく，比例する $\psi_1 = C\psi_2$（C はある定数）。束縛状態に対応する波動関数 ψ が，あるエネルギー固有値 E ($E > E_g$) に対する固有関数であるとする。すなわち，ψ が

$$H\psi = E\psi$$

あるいは，

$$A^\dagger A\psi = \mathcal{E}\psi, \quad \mathcal{E} = E - E_g > 0$$

を満たす規格化可能な関数であるとするとき，

$$AA^\dagger\tilde{\psi} = \mathcal{E}\tilde{\psi},$$

を満たす規格化可能な関数 $\tilde{\psi}$ が存在するならば，ψ と $\tilde{\psi}$ には，位相因子を除いて

$$A\psi = \sqrt{\mathcal{E}}\tilde{\psi}, \quad A^\dagger\tilde{\psi} = \sqrt{\mathcal{E}}\psi$$

の関係があることを証明せよ。

(4) 前問 **4.(1)**~**(3)** の結果から，ポテンシャル $U(x)$ が与えられると，関数 $W'(x)$ と基底状態のエネルギー固有値 E_g を求めることで，ポテンシャル $U(x)$ の場合と同じエネルギー準位を導くような $U(x)$ とは異なるポテンシャル $\tilde{U}(x)$ を求めることができる（基底状態 $\tilde{\psi}_g(x)$ は除く）。前問 **1.** で与えられた 1 次元の井戸型ポテンシャル $U(x)$ の場合に，そのようなポテンシャル $\tilde{U}(x)$ を具体的に求めよ。ただし，$V_0 \to \infty$ の場合で，$0 < x < L$ の範囲でのみ考えればよい。

IV

1 辺 L のマクロな大きさの矩形面内（面積 $A = L^2$）に，質量 m の古典自由粒子または量子論的自由粒子が，マクロな数 N 個 閉じ込められている。粒子間の相互作用，および粒子と矩形面とのまさつは無視できるとする。この系が絶対温度 T の熱平衡状態にある。$k_{\rm B}$ をボルツマン定数として $\beta = 1/(k_{\rm B}T)$ である。プランク定数を $\hbar = h/(2\pi)$ とする。次の各問いに答えよ。

1. まず古典自由粒子系を考える。この系のハミルトニアンは，i 番粒子の運動量を $\mathbf{p}_i$ として，$\mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i^2/(2m)$ と与えられる。i 番粒子の位置を $\mathbf{r}_i$ とする。

(1) この系の分配関数

$$Z(\beta, N) = \frac{1}{N!\, h^{2N}} \int \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \cdots \mathrm{d}\mathbf{r}_N \int \mathrm{d}\mathbf{p}_1 \cdots \mathrm{d}\mathbf{p}_N\, e^{-\beta \mathcal{H}_N}$$

を計算せよ。積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi/a}$ $(a > 0)$ を用いてよい。

(2) この系の内部エネルギー $E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta, N)$ を計算し，定積熱容量 $C_{A,N}$ を求めよ。

以下では，量子論的自由粒子系を考える。

2. この系の 1 粒子エネルギー準位は $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 \mathbf{k}^2/(2m)$ と与えられる。ただし，周期境界条件を用いると，$\alpha = x, y$ として，$\mathbf{k} = (2\pi/L)(\nu_x, \nu_y)$, $\nu_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\infty$ である。この系の 1 粒子状態密度 $\rho(\varepsilon) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}})$ を計算せよ。δ はディラックのデルタ関数である。マクロ系で成り立つ積分移行の式

$$\sum_{\mathbf{k}} \cdots = \frac{A}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}\mathbf{k} \cdots$$

を用いてよい。

以下の問いでは，特に断らない限り，**2.** で導いた $\rho(\varepsilon)$ の結果を用いずに，一般に $\rho(\varepsilon)$ として答えても良い。

3. この体系の微視状態は，波数 $\mathbf{k}$ の 1 粒子状態を占める粒子の数を $n_{\mathbf{k}}$ として，様々な $\mathbf{k}$ に渡る占有数の組 $\sigma = \{n_{\mathbf{k}}\}$ で指定される。フェルミ粒子なら $n_{\mathbf{k}} = 0, 1$ であり，ボース粒子なら $n_{\mathbf{k}} = 0, 1, 2, \cdots, \infty$ である。スピン自由度は考えない。この系の微視的エネルギーと粒子数は，それぞれ $E_\sigma = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$, $N_\sigma = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ と書くことができる。化学ポテンシャルを μ として，$\xi = -\beta\mu$ とおく。フェルミ粒子系，ボース粒子系のそれぞれについて，次の各問いに答えよ。

(1) 大分配関数 $Z_{\rm G}(\beta, \xi) = \sum_\sigma e^{-\beta E_\sigma - \xi N_\sigma}$ を計算せよ。

(2) グランドポテンシャル $\Omega(\beta, \xi) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{\rm G}(\beta, \xi)$, 粒子数 $N = -\frac{\partial}{\partial \xi} \ln Z_{\rm G}(\beta, \xi)$, 内部エネルギー $E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{\rm G}(\beta, \xi)$ を，$\varepsilon_{\mathbf{k}}$ を含む式の $\mathbf{k}$ での和，あるいは $\rho(\varepsilon)$ を含む式の ε での積分で表せ。

4. この系が十分低温に置かれたスピン 1/2 のフェルミ粒子系であるとする。**2**. で求めた $\rho(\varepsilon)$ の 2 倍を改めて $\rho(\varepsilon)$ とし，スピン自由度を考慮に入れる。絶対零度の化学ポテンシャルを μ_0 とする。計算には，任意の穏やかな関数 $\phi(\varepsilon)$ について成立する低温でのべき級数展開の公式

$$\int_0^\infty \phi(\varepsilon)f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \int_0^\mu \phi(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon + \frac{(\pi k_\mathrm{B}T)^2}{6}\left.\frac{\mathrm{d}\phi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu} + \cdots$$

を用いてよい。$f(\varepsilon)$ はフェルミ分布関数 $f(\varepsilon) = 1/(e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1)$ である。

(1) 化学ポテンシャル μ の温度依存性を，T^2 の項まで計算せよ。

(2) 内部エネルギー E の温度依存性を，T^2 の項まで計算せよ。

(3) この系の定積熱容量 $C_{A,N}$ を，T^1 の項まで計算せよ。古典自由粒子系の熱容量と対比して，熱容量にこのような違いが現れる理由を，パウリの排他原理とフェルミ縮退という言葉を用いて簡単に説明せよ。必要なら図を用いて良い。

5. この系がスピン 0 のボース粒子系であるとして，ボース凝縮する可能性を検討しよう。波数 $\mathbf{k}$ の 1 粒子エネルギー準位を占める粒子数 $n_\mathbf{k}$ の大正準集合平均は

$$\langle n_\mathbf{k}\rangle_\mathrm{G} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\mathbf{k}-\mu)}-1}$$

と与えられる。

(1) この系の化学ポテンシャルは $\mu < 0$ でなければならないことを示せ。ただし，1 粒子エネルギー準位の原点は $\varepsilon_{\mathbf{k}=0} = 0$ である。

(2) 系の全粒子数が

$$N = \frac{A}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{2\pi k}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}\,\mathrm{d}k \qquad (k = |\mathbf{k}|)$$

と書けたとして，μ の関数としてこの式の積分の収束・発散を調べ，この系がボース凝縮するかどうか論ぜよ。ボース凝縮する場合には，その転移温度 T_c を計算せよ。

6. 面積 A の矩形面内に束縛されたフェルミ粒子系，ボース粒子系のそれぞれについて，面積の縮小・拡大に対する体系の圧力 P を考える。

(1) グランドポテンシャル Ω と圧力 P の関係 $\Omega = -PA$，および **2.** で求めた $\rho(\varepsilon)$ の結果を用いて，圧力 P を内部エネルギー E で表す式（ベルヌイの式）を求めよ。

(2) 温度を $T \to 0$ K としたときの体系の圧力 P を各粒子系について求め，そのように振る舞う理由をそれぞれ簡単に説明せよ。