平成２５年度
理学研究科　博士前期課程　学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目(物理学)

試験時間　２４０分

注意事項

1. 問題は全部で８ページあります。
2. 監督者から解答を始めるよう合図があるまで冊子を開かないこと。
3. 問題 I, II, III, IV すべてを解答すること。
4. 各問題ごとに別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，各問題について１枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙の所定欄に, 問題番号と受験番号を必ず記入すること。（氏名は記入しない）
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

1. 球が斜面を転がり落ちる過程を考える。斜面と水平面の間の角度を θ，重力加速度の大きさを g とする。球は半径 a，質量 m で密度は一様である。転がり摩擦は無視できるものとする。

(1) 球の中心を通る軸の回りの慣性モーメントの大きさが $\frac{2}{5}ma^2$ になることを示せ。

滑り摩擦係数が十分大きく，球は滑らずに転がり落ちるものとする。摩擦力の大きさを f とする。斜面上で固定されていた球が時刻 $t=0$ で固定をはずされて動き始めた。時刻 t $(t>0)$ における重心の斜面に沿った平行移動距離を x とする。

(2) 球の運動は，重心の平行移動運動と重心の回りの回転運動の合成と見なすことができる。それぞれの運動方程式を書け。これまでに与えられていない物理量を使いたいなら，定義した上で使ってもよい。

(3) 球が滑らないための滑り摩擦係数の下限を，上に与えられた記号で表せ。

(4) ラグランジアンを書き下せ。複数の座標変数を使ってはいけない。

(5) 初期条件は，$t=0$ で x も速度も 0 である。x を t の関数として表せ。

最後に，滑り摩擦係数が **(3)** で求めた下限の半分で，球は斜面を滑りながら転がり落ちるものとする。これまでと同様に球は $t=0$ で動き始めた。

(6) 時刻 t までに摩擦力が球に加えた仕事を，ここまでに与えられた記号で表せ。

2.　以下のような重力加速度を求める２種類の実験を行った。（なお，この実験に先立ち，様々な形状で様々な材質のおもりを同時に落下させてみたが，落下時間にほとんど差がなかった。本計測には断面積の小さな鉛のおもりを使用した。）

実験１

一人が３階から掛け声を発した。５階にいた者がその合図でおもりを窓枠の高さから手放した。地上では５名が各自の腕時計の秒針で落下時間を計測した。この測定を，役割を交代しながら４回繰り返し，合計２０個の測定値を得た。測定値は全て（１秒でも３秒でもなくて）２秒であった。

この建物の縮尺百分の一の設計図では，地上から５階の窓枠までが 196mm であった。図では地上を示す実線が太いために，0.1mm の桁は読み取れなかった。

実験２

1kHz の発信器，２個の押しボタンスイッチ，and 回路や or 回路などの電子回路，電気パルスカウンターなどを用いて，時間差測定装置を製作した。この装置では，どちらか一方のスイッチが押されてから他方のスイッチが押されるまでの時間差が 1/1000 秒の精度で測定できるものとする。

５階にいた者は右手にスイッチ，左手におもりを持ち，窓枠の高さからおもりを手放した瞬間にスイッチを押した。地上にいた者はおもりが地上に衝突した瞬間に２個目のスイッチを押した。この測定を，担当者を交代しながら１０回行い，以下の測定値を得た。（測定値は小さな値から順に並べているが，平均値はちょうど 2.000 秒である。）

1.800 , 1.915 , 1.930 , 1.995 , 2.000 ,
2.015 , 2.030 , 2.065 , 2.100 , 2.150 秒

５階の窓枠から地上まで巻尺を垂らして高度差を実測した。巻尺の目盛が１ｃｍだったので，その 1/10 まで読みとって，測定値 19.600 m を得た。

このような２種類の実験結果からは，重力加速度の値をそれぞれどのように表示するのがふさわしいかを以下のＡ～Ｅより選び，それぞれの実験についてその値を選んだ理由も，何が誤差の要因であるかを考慮した上で，５行程度で記述せよ。数値や数式を含んでもよい。

A　$1 \times 10^1\ \mathrm{m/s^2}$　,　B　$1.0 \times 10^1\ \mathrm{m/s^2}$　,　C　$9.8 \times 10^0\ \mathrm{m/s^2}$　,
D　$9.80 \times 10^0\ \mathrm{m/s^2}$　,　E　$9.800 \times 10^0\ \mathrm{m/s^2}$

II

1. 電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ の空間分布が与えられたとき，それによって位置 $\boldsymbol{r}$ に生じる磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は，次の式で計算されるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ から $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ で求められる。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\boldsymbol{r}' \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{1}$$

ただし，μ_0 は真空の透磁率を，$d^3\boldsymbol{r}' = dx'dy'dz'$ は 3 次元の体積要素を表す。以下の問いに答えよ。解答には結果だけでなく考え方も示すこと。

(1) 式 (1) で与えられるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \int d^3\boldsymbol{r}' \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ を求めよ。ただし，被積分関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ は，記号 $\boldsymbol{\nabla}$ を含まない形まで計算すること。

(2) 図 1 のように，電流 I が z 座標軸の上を正の方向に向かって流れているとき，これによって生じる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

(3) 式 (1) から求められるベクトル場 $\boldsymbol{B}$ の発散 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}$ と回転 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}$ を計算せよ。その結果を，問 **(2)** で求めた $\boldsymbol{B}$ が満たすことを示すとともに，問 **(2)** の z 軸を含む全領域で成り立つ電流密度 $\boldsymbol{J}$ の表式を求めよ。

(4) 図 2 のように，z 座標軸を中心軸とする円柱（半径 a）に z 方向にのみ一様に電流密度 $\boldsymbol{J}$ の電流が流れているとき，これによって生じるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。また，z 軸からの距離を ρ として，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のゼロでない成分のグラフを ρ の関数として描け。

なお，必要があれば以下の公式を用いてよい。円筒座標 (ρ, φ, z) では，スカラー f に対して，

$$\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\triangle f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ベクトル $\boldsymbol{A} = A_\rho \boldsymbol{e}_\rho + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + A_z \boldsymbol{e}_z$ に対して，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \boldsymbol{e}_z \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right]$$

ここで，$\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ は，それぞれ ρ, φ, z 方向の単位ベクトルである。

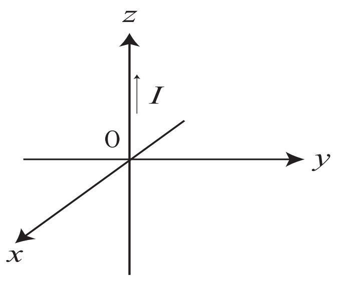


図 1

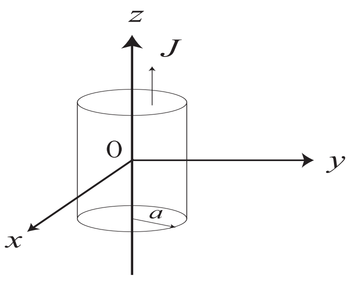


図 2

2. 電磁場中を運動する荷電粒子（質量 m，電荷 q）は，次のラグランジアン L で記述できる。

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\phi + q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A} - V$$

ここで，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は粒子の位置ベクトル，$\dot{\boldsymbol{r}}$ はその時間微分，$\phi = \phi(\boldsymbol{r}, t)$ は電磁場のスカラーポテンシャル，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ は電磁場のベクトルポテンシャル，$V = V(\boldsymbol{r}, t)$ は電磁ポテンシャル以外のポテンシャルである。以下の問いに答えよ。解答には結果だけでなく考え方も示すこと。

まず，電磁場のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ がデカルト座標系 (x, y, z) で

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{1}{2}yB, \frac{1}{2}xB, 0\right)$$

で与えられるとする。ここで，B は空間的には一様だが，時間 t には依存する，つまり B は t のある関数 $B = B(t)$ である。電磁場のスカラーポテンシャルは

$$\phi = 0$$

とし，電磁ポテンシャル以外のポテンシャル V は

$$V = mgz$$

とする。ここで g は重力加速度の大きさである。

(1) 磁束密度 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ と電場 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ を求め，電磁誘導の法則が成立していることを示せ。

次に，デカルト座標系 (x, y, z) に対して，共通の z 軸のまわりに，原点 O を共有して，角度 $\varphi(t)$ だけ回転するデカルト座標系 (X, Y, Z) を考える。両座標の間には次の関係がある。

$$\begin{aligned} x &= X\cos\varphi(t) - Y\sin\varphi(t), \\ y &= X\sin\varphi(t) + Y\cos\varphi(t), \\ z &= Z \end{aligned}$$

(2) 座標系 (x, y, z) におけるラグランジアン $L = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ と座標系 (X, Y, Z) におけるラグランジアン $L = L(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ を求めよ。

(3) 座標系 (X, Y, Z) における荷電粒子の運動方程式を具体的に書き下せ。

(4) 座標系 (X, Y, Z) の回転角速度 $\dot{\varphi}$ を $\dot{\varphi}(t) = -\frac{qB(t)}{2m}$ と選べば，座標系 (X, Y, Z) における運動方程式において，磁束密度 B の 1 次の項を消去することができる。このとき，特に，$\dot{\varphi}$ と B が時間に依らない場合に，粒子の運動方程式をすべての項を考慮して解け。

III

1. ハミルトニアン H を

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q^2\,, \qquad \big[\,Q\,,\,P\,\big] = i\hbar \tag{2}$$

とする。P と Q はエルミート演算子であり，m と ω は正の定数である。演算子 a を

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(Q + \frac{i}{m\omega}P\right)$$

で定義する。

(1) 交換関係 $\big[\,a\,,\,a^\dagger\,\big]$ を求めよ。

(2) H を a と $a^\dagger$ で表し H の固有値を求めよ。エルミート演算子 $a^\dagger a$ の固有値が非負の整数になることを用いてよい。

2. 磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が存在する場合，質量 m，電荷 q の粒子の状態を考える。国際単位系 (SI 単位系) を用いると，ハミルトニアン H は

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\,, \qquad \boldsymbol{p} = -\,i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

で与えられる。

(1) 交換関係 $\big[\,p_x\,,\,p_y\,\big]$，$\big[\,p_y\,,\,p_z\,\big]$，$\big[\,p_z\,,\,p_x\,\big]$ を磁場で表せ。

(2) B を定数として $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = (\,0,\,0,\,B\,)$ の場合，H を 2 つの部分

$$H = H_{xy} + H_z\,, \qquad H_{xy} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m}\,, \qquad H_z = \frac{p_z^2}{2m}$$

に分割する。H_{xy} は式 (2) と同型になる。$P = p_y$ としたとき Q, ω を求めよ。また，**1.(2)** の結果から H_{xy} の固有値 E_{xy} を求めよ。

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (\,0,\,Bx,\,0\,)$ の場合，$H\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$ を満たす固有関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は k_y, k_z を定数として $\psi(\boldsymbol{r}) = \exp\big(ik_y y + ik_z z\big)\varphi(x)$ とおけ

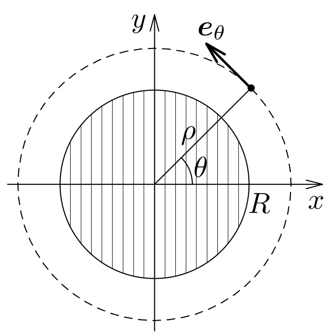
$$H'\varphi(x) = E'\varphi(x)\,, \qquad E' = E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

になる。H' も式 (2) と同型になる。P, Q, ω を求めよ。

3. $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$ とする ($\rho \geq 0$)。磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が

$$B_x = B_y = 0\,, \quad B_z = \begin{cases} B\,, & \rho \leq R \\ 0\,, & \rho > R \end{cases} \qquad B = \text{定数}$$

の場合を考える。図で ||||| は $B_z = B$ の領域を表し，z 軸は紙面に垂直上向きである。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A(\rho)\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\theta = \big(-\sin\theta,\,\cos\theta,\,0\big)$ とおける。



(1) $A(\rho)$ を求めよ。$\rho \lesseqgtr R$ の場合分けが必要である。ストークスの定理を用いてもよい。

(2) 粒子を $z =$ 一定，$\rho =$ 一定 $> R$ のリング (図の破線) に閉じ込める。リング上に磁場は存在しない。変数は θ だけで $\boldsymbol{\nabla} = \dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{\rho}\dfrac{d}{d\theta}$ である。式 (3) の H は

$$H = \frac{\hbar^2}{2m\rho^2}\left(L_z - \alpha\right)^2 \ , \qquad L_z = -\,i\frac{d}{d\theta}$$

になる。定数 α を求めよ。なお，$d\boldsymbol{e}_\theta/d\theta \neq 0$ である。

(3) $H\psi(\theta) = E\psi(\theta)$ を解き固有値 E を求めよ。固有関数 ψ は x, y の一価関数であるから $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$ である。

(4) 基底状態 (最低エネルギーの状態) の E を $\phi = \pi R^2 B/\mathit{\Phi}_0$ の関数として $0 \leq \phi \leq 4$ の範囲で図示せよ。ϕ は磁束量子 $\mathit{\Phi}_0 = \pi\hbar/q$ を単位とした磁束である。

(5) リングを $\theta = 0$ で切断すると，粒子は $0 < \theta < 2\pi$ の範囲を運動する。境界条件を $\psi(0) = \psi(2\pi) = 0$ とする。H の固有値 E を求めよ。

IV

体積が V の箱に閉じ込められた，N 個の粒子からなる古典理想気体を考える。粒子の質量を m として以下の問いに答えよ。また粒子は内部自由度をもたず，並進運動だけをする。なお，ボルツマン定数およびプランク定数はそれぞれ k，h として答案を記せ。

1. 気体のエネルギーの総和 E を用いて，この気体の温度 T と圧力 P を記せ。理想気体の状態方程式とエネルギー等分配則を証明せずに用いて良い。

2. 体積を $V = V_0$ から V_1 にゆっくりと増加させたところエネルギーが E_0 から E_1 に変化した。 箱の壁はすべて断熱的であり，気体は常に熱平衡が成り立っているとして良い。エネルギー E_1 を，E_0, V_0, V_1 の関数として求めよ。

3. 古典統計力学を用いるとエントロピー S は,

$$S(E,\ V,\ N) \ = \ k \ln W(E,\ V,\ N) \tag{4}$$

$$W(E,\ V,\ N) \ = \ \frac{1}{N!\, h^{3N}} \int d\boldsymbol{r}_1 \cdots d\boldsymbol{r}_N \int d\boldsymbol{p}_1 \cdots d\boldsymbol{p}_N \tag{5}$$

と表せる。ここで $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ は粒子の座標を，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$ は粒子の運動量を表す。運動量空間の積分範囲は，粒子のエネルギーの和が

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m} \ \le \ E \tag{6}$$

である範囲に限られる。$3N$ 次元で半径が a の球の体積 $\mathcal{V}(a,\ 3N)$ は

$$\mathcal{V}(a,\ 3N) \ = \ a^{3N} \ \frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma\left(\dfrac{3N}{2}+1\right)} \ \simeq \ a^{3N} \left(\frac{2\pi e}{3N}\right)^{3N/2} \tag{7}$$

と表されることを使って (e は自然対数の底)，エントロピー S を E, V, N の関数として求めよ。なお式 (7) ではスターリングの公式

$$\ln\ \Gamma(N+1) \ = \ \ln N! \ \simeq \ N \ln N \ - \ N \ = \ N\ \ln\left(\frac{N}{e}\right) \tag{8}$$

が用いられている。スターリングの公式を用い，S には $N!$ が表に現れない形に整理すること。

4. 前問で求めた S を用い，$\dfrac{1}{T} = \left(\dfrac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}$ により定義される温度，および $P = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N}$ により定義される圧力を求め，問 1 で求めたものと一致することを示せ。

5. 問 3 ではエントロピー S を E, V, N の関数として求めた。問 1 あるいは問 4 で求めた関係式を用い，温度 T，体積 V，粒子数 N の関数 $S = S\,(T,\ V,\ N)$ に書き換えよ。

6. ここまでの計算では気体を古典理想気体としているので，量子気体に現れるフェルミ縮退やボーズ凝縮が考えられていない。縮退や凝縮を無視しても良いのは，箱がある体積より十分に大きく $V \gg V_Q$，気体が稀薄な場合である。この V_Q を N, T, m などを使って表しなさい。また V_Q が導かれる理由を述べなさい。

この粒子は高温になると，質量が m_1 と m_2 (総和は $m = m_1 + m_2$) の 2 つの粒子に分裂する。粒子がひとつ分裂する際の吸熱エネルギーを Q (> 0) として，分裂と結合についての熱平衡状態を考える。以下の問いでは新たに発生した粒子も，結合して粒子に戻ることを除き，内部自由度を持たない自由粒子と近似してよい。

7. ある温度 T で熱平衡にあるとき，Nx 個の粒子が分裂していた。ここで x は分裂している割合 を表し，$0 < x < 1$ である。分裂のための吸熱エネルギーも考慮して，粒子のエネルギーの総和 E を求めよ。

8. 前問の設定で，系全体のエントロピー S を T, V, N, x の関数で表せ。

9. E, V, N を一定に保った場合，熱平衡ではエントロピーが最大となるように分裂する。このことを利用して， 粒子の半分 $(x = 1/2)$ が分裂する温度 T が満たすべき等式を求めよ。なお等式に使って良い変数は，T, V, N, m_1, m_2, Q と物理定数である。分裂していない粒子の質量 m は $m_1 + m_2$ に置き換えること。

ヒント: $\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)_{E,V,N} = \left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)_{T,V,N} + \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{E,V,N}\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_{x,V,N}$

10. 前問で求めた温度は Q/k より, (a) 50%以上高い，(b) ±50%の範囲，(c) 50%以下のいずれか。選択した上で，その理由を述べよ。この状態でも気体は十分に希薄なため縮退などを考えなくても良いと仮定せよ。