平成２４年度
理学研究科　博士前期課程　学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目(物理学)

試験時間　２４０分

注意事項

1. 問題は全部で５ページあります。
2. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは開かないこと。
3. 問題 I, II, III, IV すべてを解答すること。
4. 各問題ごとに別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，各問題について１枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を必ず記入すること。（氏名は記入しない）
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

振動する系やその系にさまざまな力の加わった運動を，いくつか考えてみよう。

1. 一様重力中で，長さ ℓ の糸に質量 m の質点がつりさげられた単振り子がある。糸が鉛直下向きから角度 $\theta_0(|\theta_0| < \pi/2)$ の位置で質点を静かに放したところ，振り子運動を始めた。糸の鉛直下向きからの角度が θ のときに，糸にかかる張力の大きさ $T(\theta)$ を求めよ。ただし，糸はたるまず，重力加速度の大きさを g とし，また θ は必ずしも微小ではないとする。

2. 質点をばねにつなぎ，周期的な外力を加えられるようにして，運動方程式 $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x = f\cos\omega t$ に従う系を用意する。この系は外力の有無や外力の振動数，γ $(\gamma \geq 0)$ の大きさなどによってさまざまな運動をする。以下ではこれらの運動について考えよう。

(1) まず，$f = 0$ として， 時刻 $t = 0$ に質点を $x = 0$ から速度 v_0 で放したところ，振動の中心 $x = 0$ を一定の周期でよぎる減衰振動を始めた。このとき γ はある値 γ_0 より小さくなければならない。この値 γ_0 を求めなさい。また，この初期条件での運動方程式の解を求めよ。

(2) 次に，$\gamma = 0$，$\omega = 1$ として，時刻 $t = 0$ に質点を $x = 0$ から静かに放した。この場合の運動方程式の解を求めよ。

(3) 次に，必ずしも $\omega = 1$ とは限らない場合に，$\gamma \neq 0$ として，時刻 $t = 0$ に質点をある位置からある速度で放したところ，その後一定の周期で，振幅も減衰したり増大することなく振動した。この振動の周期と，時刻 $t = 0$ での質点の位置と速度を求めよ。

(4) 最後に，γ を (1) で求めた範囲 $\gamma < \gamma_0$ にとり，さらに $f \neq 0$，$\omega = 1$ として，時刻 $t = 0$ に質点を $x = 0$ から静かに放したときの運動方程式の解を求めよ。

II

1. 電磁場中の荷電粒子（質量 m，電荷 $q > 0$）の運動について，次の問いに答えよ。荷電粒子の速さは光速より十分遅いとする。

(1) z 方向の一様な磁場（磁束密度 $B(> 0)$）の中で，荷電粒子を座標の原点から $+x$ 方向に速さ v_0 で打ち出す。運動方程式を解け。また，どんな軌跡になるか簡単に説明せよ。

(2) y 方向の一様な電場 $E(> 0)$ の中で，荷電粒子を座標の原点から $+x$ 方向に速さ v_0 で打ち出す。運動方程式を解け。また，どんな軌跡になるか簡単に説明せよ。

(3) z 方向の一様な磁場（磁束密度 $B(> 0)$）と y 方向の一様な電場 E の中で，荷電粒子を座標の原点から $+x$ 方向に速さ v_0 で打ち出す。

- **(a)** 運動方程式を解け。また，どんな軌跡になるか簡単に説明せよ。
- **(b)** 現在の座標系に対して一定の速さ V で $+x$ 方向に動く座標系を用いて，(a) の解を表せ。また，速さ V を適当に選ぶと，単純な円運動に見える。このときの速さ V を求めよ。
- **(c)** (b) の結果は，座標変換によって電磁場も変換されることを示している。電場の y 成分と磁束密度の z 成分がどのように変換されるか答えよ。

(4) z 方向の一様な磁場（磁束密度 $B(> 0)$）の中で，原点からの変位に比例する復元力が荷電粒子に働いているとする。xy 面内で原点の周りに円運動する解があること，また，右回りの回転と左回りの回転の角速度の絶対値の差が磁束密度の大きさに比例することを示せ。

（次ページに続く）

2. 磁石の磁極が作る磁場について考える。

(1) 真空中で，原点に小さなループ電流が置かれているとき，ベクトルポテンシャルは磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ を用いて

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{m} \times \nabla\frac{1}{r}$$

とかける。

(a) 原点を除いて，磁場が

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (*)$$

となることを示せ。

(b) 磁気モーメントが $+z$ 方向を向いているとき，磁場を求めよ（原点は除く）。

(2) 長さ方向に一様に磁化した十分細くて長い磁石を考える。この磁石の単位長あたりの磁気モーメントの大きさを κ とする。この磁石を z 軸に沿って，一方の端を原点に，他方の端を $z \to -\infty$ となるように置く。磁石内に分布する磁気モーメントが作る磁場をたし合わせて磁石のまわりの磁場を求め，原点に置かれた点磁荷がクーロンの法則に従って作る磁場に等しいことを示せ。磁場の計算には (1)-(b) の結果ではなく，$(*)$ 式を用いるとよい。また，必要ならば

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x-x') = -\frac{\partial}{\partial x'}f(x-x')$$

という関係を用いよ。

III

x 軸上を運動する質量 m の粒子が，静的 potential $U(x)$ の下で定常状態にある時，そのエネルギーを ε とすれば粒子の波動関数 $\varphi_\varepsilon(x)$ は次の Schrödinger 方程式に従う。

$$\hat{H}\,\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon\,\varphi_\varepsilon(x)\,; \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$$

以下では $U(x)$ が次のように与えられているとする (但し a, γ は正の定数)。

$$U(x) = \begin{cases} +\infty & (x < 0) \\ -\dfrac{\hbar^2\gamma^2}{2m} & (0 \le x < a) \\ 0 & (a \le x) \end{cases}$$

1. まず，束縛状態について調べよう。$\varepsilon < 0$ の時，Schrödinger 方程式の解は，A, B, $C_\pm$ を ε 毎に定まる適当な定数として次の形で与えられる（$\kappa, q > 0$）。

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ A\sin qx + B\cos qx & (0 \le x < a) \\ C_+\,e^{\kappa x} + C_-\,e^{-\kappa x} & (a \le x) \end{cases}$$

(1) q 及び κ を ε を用いて表せ。

(2) B/A 及び C_+/A を求めよ。理由を明らかにすること。

(3) 束縛解に対して q が満たすべき等式を導き，a, γ を用いて表せ。

(4) 束縛解が存在するための γ の範囲を求めよ。

2. 次に，散乱状態について調べよう。$\varepsilon > 0$ の時の Schrödinger 方程式の解は，A', B', $C'_\pm$ を ε 毎に定まる適当な定数として次の形で与えられる（$k, q > 0$）。

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ A'\sin qx + B'\cos qx & (0 \le x < a) \\ C'_+\,e^{ikx} + C'_-\,e^{-ikx} & (a \le x) \end{cases}$$

(1) B'/A' 及び $C'_\pm/A'$ を，a, k, q で表せ。また，$|C'_+| = |C'_-|$ を示し，その理由を物理的立場から説明せよ。

(2) $\varepsilon\,(> 0)$ の変化に対する $|C'_+|^2/|A'|^2$ の最小値，及びその時の q を求めた上で，$|C'_+|^2/|A'|^2$ を q の関数としてその概形をグラフに表せ。
（$|C'_+|^2/|A'|^2$ が最小となることは粒子が $0 \le x < a$ の領域に存在する確率が相対的に最大または極大であることを意味しており，共鳴状態に対応すると考えられる。）

(3) $C'_+/C'_- = -e^{2i\delta_\varepsilon}$ とおくと，$x \ge a$ で $\varphi_\varepsilon(x) \propto \sin(kx + \delta_\varepsilon)$ となっており，δ_ε は phase shift と呼ばれる。δ_ε を a, k 及び q で表せ。また，特に前問の $|C'_+|^2/|A'|^2$ が最小になる場合に δ_ε がどのような値を取るか述べよ。

(4) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\delta_\varepsilon$ を求めよ。
γ の値により $\varepsilon \to -0$ に束縛状態が現れる場合，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\delta_\varepsilon$ が特異的な振舞いをするので注意すること。

IV

単量体が N 個直線状に整列している高分子がある。この単量体の基底状態のエネルギーを 0 とする。また，基底状態では縮退がなく，長さが ℓ_0 である。第 1 励起状態はエネルギーが ε であり，2 重に縮退しており，長さが $3\ell_0$ である。さらに，第 2 励起状態はエネルギーが 2ε であり，3 重に縮退しており，長さが $3\ell_0$ である。これ以上の励起状態はない。各単量体は，統計的に独立とみなせるとする。系は熱平衡状態にあり，温度は T とする。また，ボルツマン定数を k_{B} とする。解答においては $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ という表記を用いてもよい。

この単量体 1 つあたりの分配関数を ζ とすると，全系の分配関数 Z は ζ^N で表されるとする。以下の問いに答えよ。

1. 全系のエネルギー E を求めよ。

2. 全系のヘルムホルツ (Helmholtz) の自由エネルギー F を求めよ。

3. 全系の熱容量 C を求めよ。また，低温および高温における漸近形を求めよ。

4. 温度 T が $\varepsilon/k_{\mathrm{B}}$ になった時，N 個の単量体のなかで基底状態にある単量体の割合は何 % と考えられるか，途中の計算を示した上で，以下の 4 つから最も適当なものを 1 つ選択せよ。

(約 30%)(約 40%)(約 50%)(約 60%)

5. 高分子全体の長さ L の熱平均値を求めよ。

6. 高分子全体の長さ L の熱平均値を温度 T の関数として概略をグラフに示せ。グラフは横軸を T，縦軸を L の熱平均値とし，特に $T = 0$ での値，および $T \to +\infty$ での極限値を明記し，それらの付近での振る舞いに注意して描け。

また，数値として，$e = 2.7$，$e^2 = 7.4$，$\log_e 2 = 0.69$，$\log_e 3 = 1.1$，$\log_e 5 = 1.6$，$\log_e 7 = 1.9$ を用いてもよい。