平成２２年度
理学研究科 博士前期課程 学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目 (物理学)

試験時間 240 分

注意事項

1. 問題 I, II, III, IV の全てについて解答すること。
2. 各問題ごとに別の解答用紙を使用すること。1 枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，各問題について 1 枚以上の解答用紙を提出すること。
3. 全ての解答用紙の所定欄に, 問題番号と受験番号を必ず記入すること。
4. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

1. 図 1 のように，質量 m の質点 2 個をバネ定数 $m\omega^2$ (ただし $\omega > 0$) の質量の無視できるバネ 3 つに連結して水平な x 軸上に置き，両端を固定する。バネはたるむことがなく質点は x 軸方向にのみ運動するとする。質点の平衡の位置はバネが全て自然長になった時であるとし，質点 1, 2 の平衡位置からの変位を $+x$ 方向にそれぞれ u_1, u_2 と表そう。摩擦や空気抵抗が無視できるものとして，以下の設問に答えなさい。

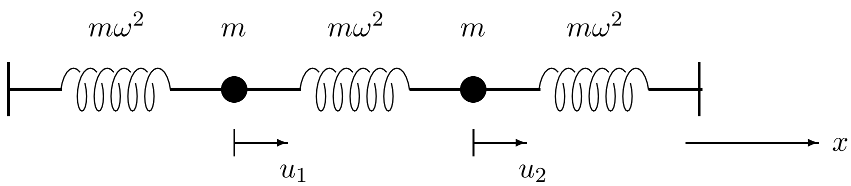


図 1

(1) u_1, u_2 を座標変数として，この 2 質点系の Lagrangian を書きなさい。

(2) この質点系の運動方程式を書きなさい。

(3) この質点系の規準角振動数を全て求めなさい。

2. 図 1 において，今度は各質点が速度に比例する抵抗力 $-m\beta\dot{u}_n$ ($n = 1, 2$; β は正の定数) を受けるとする。このとき，以下の設問に答えなさい。

(4) この質点系の運動方程式を書きなさい。

(5) 質点 1 のみに適当な変位を与えたところ，振動することなく平衡の位置に近づいた。このとき，β と ω の間に成り立つ関係を導きなさい。

3. 次に，図 2 のように，質量 m の質点 3 個をバネ 4 個に連結して水平な x 軸上に置き，両端を固定する。中央のバネ 2 個のバネ定数は共に $m\omega^2$, 両端のバネ 2 個のバネ定数は共に $m\omega'^2$ (ただし $\omega, \omega' > 0$) である。質点の平衡の位置はバネが全て自然長になった時であり，質点は x 軸方向にのみ運動する。図の左から n 番目の質点の平衡位置からの変位を $+x$ 方向に u_n と表す ($n = 1, 2, 3$)。$\omega' = r\omega$ とおき，再び摩擦や空気抵抗が無視できるとして，以下の設問に答えなさい。

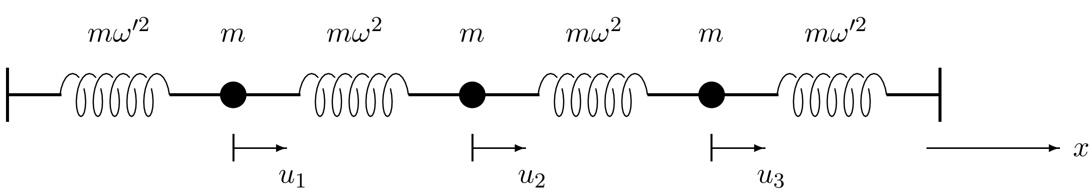


図 2

(6) $r = 1$ の場合について，この質点系の規準角振動数を全て求めなさい。

(7) $r \to 0$ の極限で，最小の規準角振動数が ω の何倍になるか，理由を付して答えなさい。

(8) $r \to \infty$ の極限で，最小の規準角振動数が ω の何倍になるか，理由を付して答えなさい。

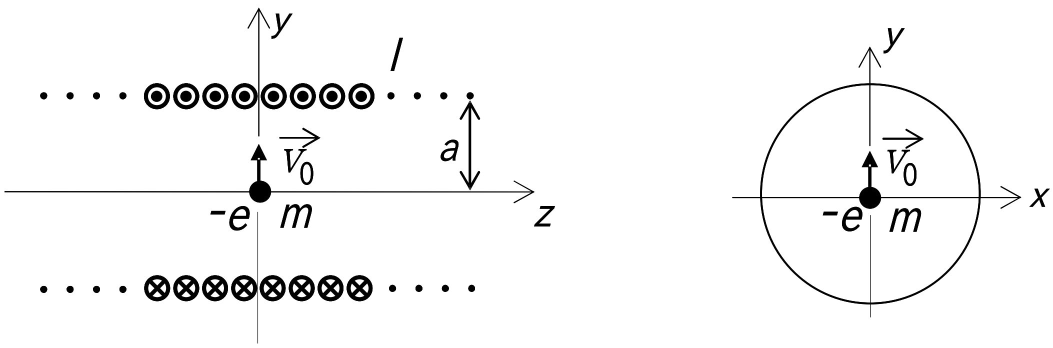
Ⅱ

1

コイルについて以下の設問に答えなさい。なお透磁率を μ_0 とする。

(1) 図 1 に示すような，半径 a，単位長さ当たりの巻き数 n の無限に長いソレノイドコイルがある。このコイルに定常電流 I を流したとき，ソレノイドコイル内外での磁束密度 $\vec{B}$ を求めなさい。ただし，コイルの中心軸を z 軸とし，z 方向の単位ベクトルを $\vec{e_z}$ と表記する。

(2) このソレノイドコイルに定常電流 I が流れているとき，図 1 に示すようにソレノイドコイルの中心軸上のある点から y 軸方向に電子（電荷 $-e$，質量 m）を速度 $\vec{v_0}$ で発射した。電子がソレノイドコイルの内壁に当たらず運動し続ける条件を求め，その運動の軌跡の一例を図示しなさい。ただし，ソレノイドコイルの導線の太さは無視できるものとする。



〈yz 平面での断面図〉　〈xy 平面での断面図〉

図1

(3) 図2に示すように一巻きコイル（半径 a）に定常電流 I を流した場合，中心軸上の点 P における磁束密度 $\vec{B}$ を図中に示された角度 θ を用いた形で表しなさい。

(4) 図3に示すような有限の長さのソレノイドコイル（単位長さ当たりの巻き数 n）に定常電流 I を流した場合，ソレノイドコイル中心軸上の点 Q での磁束密度 $\vec{B}$ は $\dfrac{\mu_0 nI}{2} C\vec{e_z}$ と表せる。C を図中に示された角度 θ_1，θ_2 を用いて表しなさい。ただし，$\vec{e_z}$ は z 方向の単位ベクトルとする。

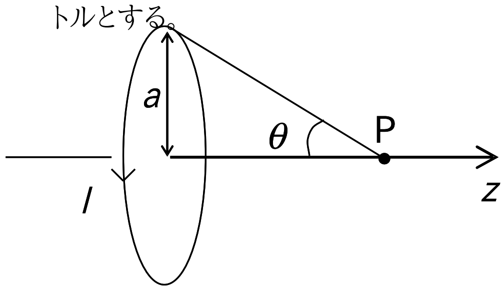


図2

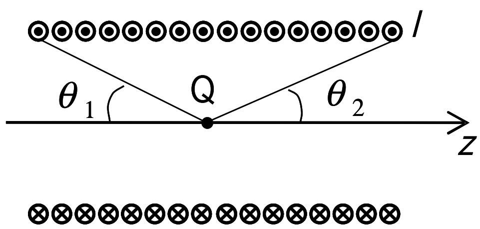


図3

2

真空中を電磁波が伝播している。電磁場ベクトルとして $\vec{E}=(E_x, E_y, E_z)$, $\vec{H}=(H_x, H_y, H_z)$ を考える。真空中でのマクスウェル方程式(微分形)と，ベクトルの公式が以下で与えられる。

$$\nabla\cdot\vec{D}=0,\quad \nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}\quad \vec{A}\text{: 一般のベクトル場}$$

真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0 及び μ_0 として以下の問いに答えなさい。

(1) 電場ベクトル $\vec{E}$ が $\nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ を満たすことを示しなさい。(ただし，c は光速とする。)

(2) Z 方向に進む平面電磁波の電場の x, y 成分が，それぞれ($z-ct$)を変数とする任意の関数を用いて，$E_x=f(z-ct), E_y=g(z-ct)$ と与えられる時，H_x, H_y を E_x, E_y を用いて表し，$\vec{E}$ と $\vec{H}$ が直交することを示しなさい。

(3) 図4に示すように、平面電磁波を真空($z\geqq 0$)から誘電率 ε，透磁率 μ_0 の媒質($z<0$)に入射する。この時，$\vec{E}$ は入射面(XZ 平面)に平行，$\vec{H}$ は入射面に垂直とする。入射角 θ と反射角 θ は等しく，屈折角を ϕ とする。連続の条件($\vec{E}$, $\vec{H}$ の境界面における接線成分は連続である)と，スネルの法則($\sqrt{\varepsilon_0}\sin\theta=\sqrt{\varepsilon}\sin\phi$)を用いて，入射電場と反射電場の振幅の比を θ, ϕ を使って表しなさい。

(4) (3)において，入射角がある値のとき，反射波がゼロになる。この時の $\theta+\phi$ の値を求めなさい。ただし，$\theta\neq\phi$ とする。

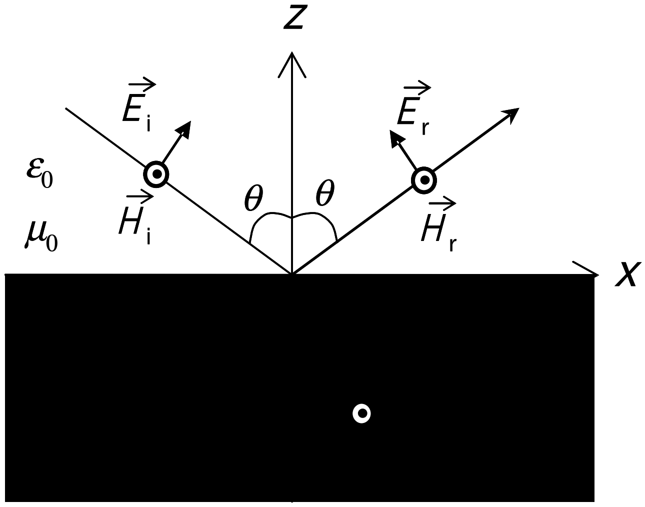


図4

III

1 次元のシュレディンガー方程式

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)\,, \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\,, \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

を考える。最初に，a と v_0 を定数とするデルタ関数型の $V(x) = \dfrac{\hbar^2 v_0}{m}\,\delta(x-a)$ を扱う。

(1) $x = a$ での接続条件は $\varepsilon \to +0$ として

$$\psi'(a+\varepsilon) - \psi'(a-\varepsilon) = 2v_0\psi(a)\,, \quad \text{ただし} \quad \psi'(x) = \frac{d\psi}{dx} \qquad \text{(i)}$$

になることを示しなさい。$\psi(x)$ は連続関数である。

(2) 束縛状態 ($|x| \to \infty$ のとき $\psi(x) \to 0$) が存在するとき, 束縛状態の固有値 E と規格化した固有関数 $\psi(x)$ を求めなさい。

次に，a と v_0 を正の定数として

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2 v_0}{m}\,\delta(x-na)$$

とする。$V(x)$ は $V(x+a) = V(x)$ を満たす周期関数である。$v_0 > 0$ より $E > 0$ になる。

(3) $\hat{U}_a = \exp\bigl(ia\hat{p}/\hbar\bigr)$ とする。任意の関数 $F(x)$ に対して

$$\hat{H}\hat{U}_a F(x) = \hat{U}_a \hat{H} F(x)$$

を示しなさい。ただし, テイラー展開より

$$F(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{d^n}{dx^n} F(x) = \exp\Bigl(a\frac{d}{dx}\Bigr) F(x) = \hat{U}_a F(x)$$

である。

ユニタリー演算子 $\hat{U}_a$ と $\hat{H}$ は可換であるから，これらの同時固有関数 $\psi(x)$ が存在する。ユニタリー演算子の固有値は絶対値 1 の複素数である。つまり, θ を実数として $\hat{U}_a\psi(x) = e^{i\theta}\psi(x)$ とおける。一方, $\hat{U}_a\psi(x) = \psi(x+a)$ であるから

$$\psi(x+a) = e^{i\theta}\psi(x) \qquad \text{(ii)}$$

になる。

(4) (ii) より $a < x < 2a$ における $\psi(x)$ は，$0 < x < a$ における $\psi(x)$ で表せる。接続条件 (i) 及び $\psi(x)$ は $x = a$ で連続であることから, $q = \sqrt{2ma^2 E/\hbar^2}$ とすると, q は

$$-1 \le B(q) \le 1\,, \quad \text{ただし} \quad B(q) = \cos q + \beta\,\frac{\sin q}{q}$$

を満たす。定数 β を求めなさい。

(5) $0 \le q \le 3\pi$ の範囲で $B(q)$ の概略を図示し，許される q の領域を明示しなさい。

IV

N 個 $(N \gg 1)$ の局在スピンからなる系の統計力学的な性質を考えよう。i 番目 $(i = 1, 2, \cdots N)$ のスピンの状態を σ_i と表し，各スピンは 2 つの状態 $\sigma_i = 1$ または，$\sigma_i = -1$ をとるとする。$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$（$k_{\mathrm{B}}$ は Boltzmann 定数，T は絶対温度）として以下の問いに答えなさい。

1. 相互作用がないとして，この系に一様な外部磁場 H_0 を印加しているときを考えよう。外部磁場 H_0 を印加することにより，各スピンのエネルギーは $-\mu H_0 \sigma_i$ と表すことができる。このとき，系の Hamiltonian は

$$\mathcal{H}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_N) = -\mu H_0 \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

と書ける。

(1) 系が独立であることに注意して分配関数 $Z(\beta, N)$ を計算しなさい。ただし分配関数は

$$Z(\beta, N) = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N = \pm 1} \exp\left[-\beta \mathcal{H}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_N)\right]$$

で定義される。

(2) 内部エネルギー $E(\beta, N)$ は

$$E(\beta, N) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$$

により求められる。$E(\beta, N)$ を求めなさい。また，温度 T の関数としてその概形を書きなさい。

(3) (2) の結果を用いて，系の熱容量 $C(T, N)$ を求め，温度 T の関数として概形を書きなさい。

(4) $T \to 0$ と $T \to \infty$ の場合に許される状態数を考えることにより，系のエントロピー $S(T, N)$ が $T \to 0$ と $T \to \infty$ の極限でどのような値に近づくかを答えなさい。また，それを基にして $S(T, N)$ を温度 T の関数としてみたときのグラフの概形を書きなさい。（$S(T, N)$ の関数形を導出する必要はない。）

2. N 個のスピンが一直線上に並んでいる系を考えよう。ただし，外部磁場はなく隣接スピン間にのみ相互作用があるとする。このとき，系の Hamiltonian は

$$\mathcal{H}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_N) = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

と書ける。

(5) 分配関数 $Z(\beta, N)$ が

$$
\begin{aligned}
Z(\beta, N) &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\exp\left[-\beta\mathcal{H}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_N)\right] \\
&= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1} e^{\beta J\sigma_1\sigma_2}e^{\beta J\sigma_2\sigma_3}\cdots e^{\beta J\sigma_{N-1}\sigma_N} \\
&= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1} e^{\beta J\sigma_1\sigma_2}\left\{\sum_{\sigma_3=\pm1} e^{\beta J\sigma_2\sigma_3}\cdots\right. \\
&\qquad \left.\left\{\sum_{\sigma_{N-1}=\pm1} e^{\beta J\sigma_{N-2}\sigma_{N-1}}\left\{\sum_{\sigma_N=\pm1} e^{\beta J\sigma_{N-1}\sigma_N}\right\}\right\}\right\}
\end{aligned}
$$

と書けることを利用して，$Z(\beta, N)$ を計算しなさい。

(6) (5) の結果を利用して，内部エネルギー $E(\beta, N)$ を求めなさい。

3. 次に，N 個のスピンが円環状に並んでいる系を考えよう。ただし，外部磁場はなく隣接スピン間にのみ相互作用があるとする。このとき，系の Hamiltonian は

$$
\mathcal{H}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_N) = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1}
$$

と書ける。ただし，$\sigma_{N+1}=\sigma_1$ とする。

(7) 分配関数 $Z(\beta, N)$ が

$$
Z(\beta, N) = \mathrm{Tr}A^N
$$

$$
A = \begin{pmatrix} \exp(\beta J) & \exp(-\beta J) \\ \exp(-\beta J) & \exp(\beta J) \end{pmatrix}
$$

と表せることを示しなさい。

(8) $\mathrm{Tr}A^N$ を求め，その結果を用いて N が十分大きいときの分配関数 $Z(\beta, N)$ の漸近形を計算しなさい。

(9) (8) の結果を利用して，内部エネルギー $E(\beta, N)$ を求めなさい。

(10) 系のエントロピー $S(T, N)$ の温度依存性を考える。1.(4) の場合と比較して共通する点，異なる点を論じなさい。