平成２１年度

千葉大学大学院理学研究科

博士前期課程　入学試験学力検査問題

（基盤理学専攻・物理学コース）

専門科目（物理学）

試験時間　１３：００～１７：００

注意事項

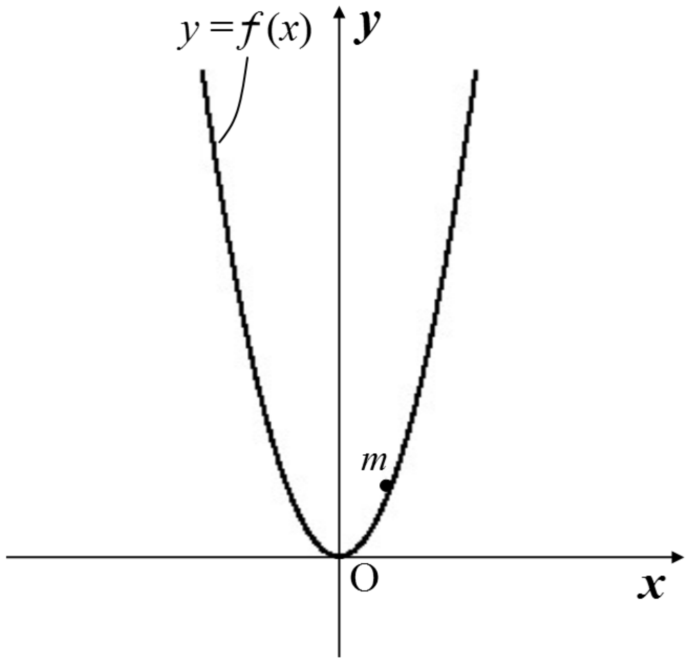
１．　問題 I，II，III，IV の全てについて解答すること。

２．　各問題ごとに別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，各問題について１枚以上の解答用紙を提出すること。

３．　全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を必ず記入すること。

４．　別途配布する下書用紙は回収しない。

I



x-y 鉛直平面で定義された、なめらかな曲線 $y = f(x)$ 上を運動する質量 m の質点の運動を考える。以下の問題では、質点には重力 $-mg\hat{\boldsymbol{y}}$（$\hat{\boldsymbol{y}}$ は y 方向の単位ベクトル）と曲線からの垂直抗力 $\boldsymbol{N}(x)$ のみが働くものとして各問に答えよ。また、特に断りがない場合は、質点は曲線上を運動する状況にあるものとする。

1. 曲線が $f(x) = x^2$ で与えられているものとする。
   曲線上の点 P $(x_{\mathrm{P}}, f(x_{\mathrm{P}}))$ に、質点を静かに置いた。置いた直後の質点に働くすべての力を曲線とともに図示せよ。また、質点に働くすべての力の大きさを、m、g、x_{P} を用いて記せ。

2. 次に曲線が一般の関数形で与えられているものとする。
   曲線 $f(x)$ 上の点 Q $(x_{\mathrm{Q}}, f(x_{\mathrm{Q}}))$ に、質点を静かに置いた。質点はその後運動を行ない、点 $(x, f(x))$ に達したものとする。

   (1) 点 $(x, f(x))$ における曲線の傾きの角度を θ とする。このとき、$\cos\theta$、$\sin\theta$ を $f'(x)$ を用いて表せ。

   (2) $\boldsymbol{N}(x)$ の大きさを $N(x)$ とする。このとき、質点の運動方程式を、x 成分、y 成分について、m、g、θ、$N(x)$ を用いて書き下せ。

(3) 質点の速さ $v(x)$ を求めよ。

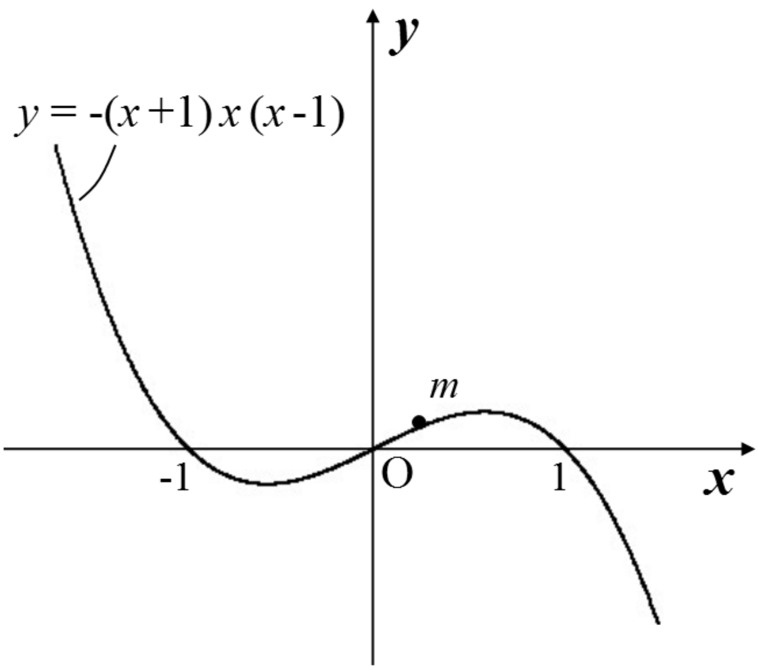
(4) $\left|\dfrac{dx}{dt}\right|$ を、$f(x)$、$f'(x)$ などを用いて表せ。

(5) $N(x)$ を、$f(x)$、$f'(x)$、$f''(x)$ などを用いて表せ。

3. 再び曲線が具体的な関数形 $f(x) = x^2$ で与えられているものとする。曲線上の点 $(-1, 1)$ に静かに質点を置いた。その後の質点の振動の周期 T を求めよ。

   ただし、$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+4x^2}{1-x^2}}\, dx$ は、α とおいてよい。

4. 曲線が $f(x) = -(x+1)x(x-1)$ で与えられているものとする。
   $x < 0$ の領域の曲線上の点 R $(x_\mathrm{R}, f(x_\mathrm{R}))$ に静かに質点を置いた。その後質点が、点 $\left(1/\sqrt{3}, f(1/\sqrt{3})\right)$ において曲線から離れたとすると、x_R はいくつでなければならないか。有効数字 2 桁で求めよ。ただし、3 次方程式 $z^3 - 12z + 22 = 0$ の実解は、$z = -(11+\sqrt{57})^{1/3} - (11-\sqrt{57})^{1/3} \simeq -4.16$ ただひとつである。



II

1. 図１のように、接地した半径 a の導体球の中心 O から距離 d の点に電荷 q を持つ点電荷 Q を置いた。ただし、$d > a$ とし、導体球外の誘電率を ϵ_0 とする。以下の問いに答えなさい。

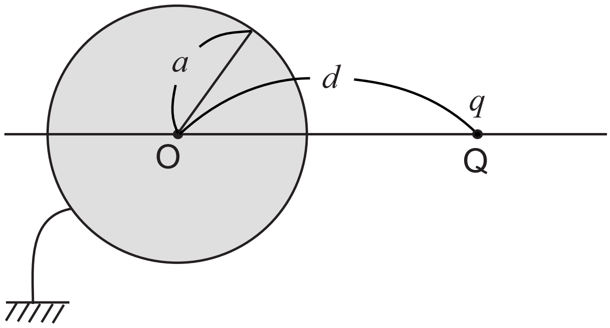


図１

(1) 導体球を点電荷で置き換えてみよう。誘電率 ϵ_0 の媒質中において、図２のように線分 OQ 上で点 O から距離 d' の点に電荷 q' を持つ点電荷 Q$'$ を置いたとき、点 O を中心とする半径 a の球面上の点 P における電位 V を $r_1 = \mathrm{PQ}$、$r_2 = \mathrm{PQ'}$、ϵ_0、q、q' を用いてあらわしなさい。無限遠の電位を 0 とする。

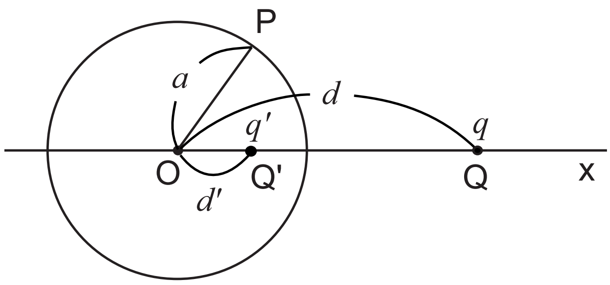


図２

(2) 前問で求めた点電荷 Q と Q$'$ による電位 V が、点 O を中心とする半径 a の球面上で $V = 0$ を満たすように q'、d' を決めなさい。座標を用いる場合は OQ 方向を x 軸にすること。

(3) 図１の点電荷 Q が導体球から受ける力 $\boldsymbol{F}$ の向きと大きさを求めなさい。力の大きさは ϵ_0、q、a、d を用いてあらわすこと。

(4) 図１の導体球表面上の点を P とする。導体球表面上に誘導される電荷の面密度 σ を、線分 OP と線分 OQ がなす角度 θ の関数として求め、q、a、d、$r_1 = \mathrm{PQ}$ を用いてあらわしなさい。

2. 誘電率 ϵ、透磁率 μ の媒質中における Maxwell 方程式は $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$、$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \partial \boldsymbol{D}/\partial t$、 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$、$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ で与えられる。ここで、$\boldsymbol{D}$ は電束密度、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度であり、$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ の関係がある。空間電荷 ρ と伝導電流 $\boldsymbol{J}$ が存在しない媒質中の電磁波伝播に関する以下の問いに答えなさい。

以下、問 (1)-(3) では誘電率と透磁率が一定の誘電体を考える。

(1) この誘電体内を伝わる電磁波の方程式を導きなさい。電場 $\boldsymbol{E}$ に関する方程式と磁場 $\boldsymbol{H}$ に関する方程式の両方を導くこと。以下の公式を用いてよい。
$\boldsymbol{A}$ をベクトルとするとき $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

(2) 誘電体中を $-z$ 方向に伝わる角振動数 ω、波数 k の平面電磁波の電場ベクトルを $\boldsymbol{E}(t, z) = \boldsymbol{E}_0 \exp[i(\omega t + kz)]$ と置いて ω と k の間に成り立つ関係を求め、電磁波の伝播速度 v を ϵ、μ を用いて表しなさい。ここで $\boldsymbol{E}_0$ は定ベクトルとする。

(3) 誘電体中を $-z$ 方向に伝わる平面電磁波の電場ベクトルが前問のようにあらわされ、$\boldsymbol{E}_0$ が x 軸正方向の定ベクトルのとき、磁場ベクトル $\boldsymbol{H}$ の方向と振幅を求めなさい。磁場ベクトルの振幅は $E_0 = |\boldsymbol{E}_0|$、ϵ、μ を用いてあらわすこと。

次に、$z \geq 0$ で $\epsilon = \epsilon_1$、$z < 0$ で $\epsilon = \epsilon_2$ の誘電体を考える。透磁率 μ は一定とする。

(4) 図 3 のように $-z$ 方向に伝わる角振動数 ω の平面電磁波が境界面 $z = 0$ に入射する場合を考える。入射波の電場、磁場を $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、反射波の電場、磁場を $\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{H}'$、透過波の電場、磁場を $\boldsymbol{E}''$、$\boldsymbol{H}''$ とするとき、$z = 0$ 面の前後でこれらが連続、すなわち $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}''$、$\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}''$ が成り立つことを示しなさい。電場ベクトルは x 軸に平行として良い。

(5) 前問の連続性の条件を用いて、入射波と反射波の振幅の比 $r = |E'/E|$ を求め、ϵ_1、ϵ_2 を用いてあらわしなさい。

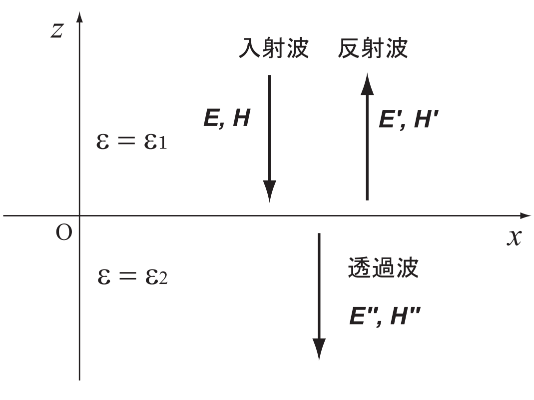


図 3

III

以下の問題 1 および 2 に答えなさい。

1. 分子内に束縛され, その内部を自由に動く電子一個を一次元の井戸型ポテンシャルで扱ってみよう。ハミルトニアンを

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a \\ V_0 & x < 0 \text{ または } a < x \end{cases} \tag{1}$$

とする。ここで a は考えている分子の長さである。以下では簡単化して $V_0 = +\infty$ と考えてよい。このときエネルギー固有値は

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}n^2, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{2}$$

となる。

(1) この分子の基底状態と第 1 励起状態のエネルギー差が 2.8×10^{-1}[eV] であるとき, 分子の長さ a を求めなさい。また, 第 1 励起状態から基底状態へ電子が光子 1 個を放出して遷移するとき, この光子の波長 λ を求めなさい。いずれも有効数字 1 桁で答えること。必要があれば以下の数値を用いなさい。$\hbar = 1.1 \times 10^{-34}$[J·s], $c = 3.0 \times 10^{8}$[m·s^{-1}], $m = 9.1 \times 10^{-31}$[kg], $e = 1.6 \times 10^{-19}$[C]。

以下の問では a に前問で求めた数値を代入する必要はない。

(2) エネルギー固有値 E_n の規格化された波動関数 $\psi_n(x)$ を求めなさい。

次に波動関数の形が,

$$\phi(x) = \begin{cases} Bx(a-x) & 0 \le x \le a \\ 0 & x \le 0 \text{ または } a \le x \end{cases} \tag{3}$$

で与えられる状態にある電子を考える。ここで B は定数であり,$\phi(x)$ は規格化されているとする。

(3) 規格化条件から B を決めなさい。

(4) 状態 $\phi(x)$ にある電子のエネルギーの期待値を求めなさい。

2. 磁気モーメント $\vec{\mu} = \gamma\vec{s}$ をもつスピン $\frac{1}{2}$ の粒子について磁場中でのスピンの振る舞いを考える。（スピンの自由度についての運動のみ考えればよい。）外部磁場 $\vec{B}$

の中に置かれた磁気モーメント $\vec{\mu}$ の運動はハミルトニアン $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ によって記述される。この問題ではスピン $\frac{1}{2}$ のスピン演算子 $\vec{s}$ をパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

によって $s_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i,\ (i = x, y, z)$ と書く表示を用いて考えることにする。

磁場中の運動を調べる前に, まず, スピン演算子の固有状態について少し考えよう。極座標表示を用いて $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ とし,$\vec{n}\cdot\vec{s}$ の固有値が $\frac{1}{2}\hbar$ の状態をスピンが $\vec{n}$ 方向を向いている状態, または, スピンの向きが (θ, ϕ) 方向である, などということにする。

(1) スピンが (θ, ϕ) 方向を向いている規格化された固有状態を求めなさい。

(2) スピンが (θ, ϕ) 方向を向いている状態について,s_x,s_y,s_z を測定したときの期待値を求めなさい。

次にこの粒子に定常磁場 $\vec{B}_0 = (0, 0, B)$ を作用させる場合を考える。(B は定数である。) 一般に, 磁場 $\vec{B}(t) = (B_x(t), B_y(t), B_z(t))$ 中では, スピンについての波動方程式は, 波動関数を

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

として

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = -\gamma\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} B_z(t) & B_x(t) - iB_y(t) \\ B_x(t) + iB_y(t) & -B_z(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

と書ける。

(3) 時刻 $t = 0$ でのスピンの向きが (θ_0, ϕ_0) であるとき, 時刻 t でのスピンの向き $(\theta(t), \phi(t))$ を求めなさい。

次にこの粒子に定常磁場 $B_0 = (0, 0, B)$, および時間とともに変動する磁場 $B_1 = (A\cos\omega t, A\sin\omega t, 0)$ を同時に作用させる場合を考える。ただし B,A,ω は定数である。ここで後の便利のため ω_0,ω_1 を,

$$\hbar\omega_0 = \hbar\gamma B, \quad \hbar\omega_1 = \hbar\gamma A \tag{7}$$

で定義しておく。この場合の波動方程式は, 波動関数をスピン演算子 s_z をもちいて
$\psi(t) = e^{-i\omega t\frac{s_z}{\hbar}}\tilde{\psi}(t)$, つまり

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\omega t}D_1(t) \\ e^{\frac{i}{2}\omega t}D_2(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi}(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \end{pmatrix} \tag{8}$$

とあらわすと解きやすい。($\tilde{\psi}(t)$ は xy 平面で磁場とともに回転している座標系での波動関数となる。）このとき $D_1(t)$,$D_2(t)$ についての方程式は,

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A} \\ \tilde{A} & -\tilde{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

の形で,$\tilde{B}$,$\tilde{A}$ は定数になる。

(4)　定数 $\tilde{B}$,$\tilde{A}$ を $\hbar\omega$,$\hbar\omega_0$,$\hbar\omega_1$ を用いてあらわしなさい。

時刻 $t = 0$ でスピンが z 方向上向きの状態にあるとき, 時刻 t でスピンが z 方向下向きの状態にある確率 $P(t)$ を求めよう。

(5)　行列

$$\begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A} \\ \tilde{A} & -\tilde{B} \end{pmatrix} \tag{10}$$

の固有値を $\tilde{B}$,$\tilde{A}$ を用いてあらわしなさい。また, 時刻 t でスピンが z 方向下向きの状態にある確率 $P(t)$ を $\tilde{B}$,$\tilde{A}$ を用いてあらわしなさい。

(6) $P(t)$ の最大値は ω に依存する。$P(t)$ の最大値を最大にする ω を選ぶとき, 時刻 t でのスピンの向き $(\theta(t), \phi(t))$ を ω_0,ω_1 を用いてあらわしなさい。ただしスピンの方向は,xy 平面での磁場が回転しているように見える元の座標系で考えること。

IV

1. 体積 V に閉じこめられた質量 m、粒子数 N の古典粒子からなる理想気体が、温度 T の熱平衡状態にある系を考える。カノニカル分布を用いて、この系の化学ポテンシャル μ を圧力 p の関数として求めよう。

(1) 系の Hamiltonian は $H = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i^2/2m$ と書ける。この系の分配関数 Z を求めよ。但し、

$$Z(V,T,N) \;=\; \frac{1}{N!h^{3N}} \int \mathrm{d}\mathbf{p}_1 \cdots \mathrm{d}\mathbf{p}_N \int \mathrm{d}\mathbf{x}_1 \cdots \mathrm{d}\mathbf{x}_N e^{-\beta H}$$

である。ここで、$\mathbf{p}_i$ と $\mathbf{x}_i$ は i 番目の粒子の運動量と座標、h は Planck 定数、k_B は Boltzmann 定数で $\beta = 1/k_\mathrm{B}T$ である。必要なら積分公式：$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$ ($a > 0$ は定数) を用いよ。

(2) この系の Helmholtz の自由エネルギー $F = -k_\mathrm{B}T\log Z$ を求めよ。ただし、Stirling の公式 $\log N! \simeq N\log N - N$ を用い、F が示量的な物理量であるとわかる形にすること。

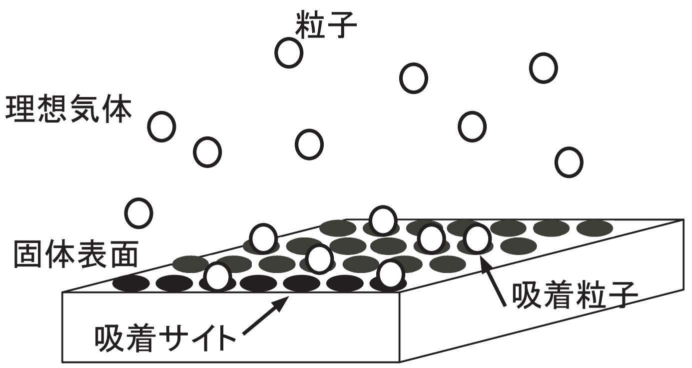
(3) この系の状態方程式を、圧力 $p = -(\frac{\partial F}{\partial V})_{T,N}$ から求めよ。

(4) この系の化学ポテンシャル μ を、$\mu = (\frac{\partial F}{\partial N})_{V,T}$ から計算し、p, T, N の関数として求めよ。次に、μ を p の関数としてグラフ（横軸 p、縦軸 μ）に描け。特に、圧力 p が $0 \sim +\infty$ の範囲で変化する時、μ はどの範囲を動くか。

2. エネルギーと粒子だけを交換できる 2 つのマクロな系 I、II が接触して平衡状態にある。この時、両系の温度と化学ポテンシャルは等しくなることを示せ。2 つの系だけで閉じていると考えてよい。

3. 図のように、温度 T、化学ポテンシャル μ の系（理想気体など）に接触して平衡状態にある固体表面を考える。グランドカノニカル分布 ($T-\mu$ 分布) を用いて、この表面に吸着している粒子の数 N を調べよう。表面には、マクロな数 M の粒子の吸着サイト (黒丸) がある。吸着サイトには粒子は 1 つまでしか吸着せず、吸着すると粒子のエネルギーは $-\varepsilon$ となる。まず、吸着した粒子どうしに相互作用はないとする。

(1) M 個の吸着サイトに n 個の粒子が吸着する時の固体表面の分配関数 $Z_n(T)$ を求めよ。縮退度（吸着の場合の数）に注意すること。



(2) 前問 (1) の $Z_n(T)$ を用いると、固体表面の大分配関数は $\Xi(T,\mu)=\sum_n Z_n(T)e^{\beta n\mu}$ となり、グランドカノニカル分布に対応する固体表面の熱力学関数 J は、$J(T,\mu)=-k_{\mathrm{B}}T\log\Xi(T,\mu)$ で与えられる。J が次式になることを示せ。必要なら展開公式：$(1+x)^m=\sum_n \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n$ を用いよ。

$$J(T,\mu) \;\;=\;\; -Mk_{\mathrm{B}}T\log(1+e^{\beta(\varepsilon+\mu)})$$

(3) $\theta=N/M$ を表面の被覆率 (coverage) という。吸着している粒子数 $N=-(\frac{\partial J}{\partial \mu})_T$ を計算し、θ を μ の関数として求めよ。次に、θ を μ の関数としてグラフに描け。温度が変化すると、グラフはどのように変化するか。

次に、表面に吸着した粒子どうしに相互作用がある場合を近似的に考えよう。１つの吸着サイトに隣り合う吸着サイトの数を z とすると、吸着原子が表面に一様に吸着する場合、１つの吸着サイトの隣には平均 $zN/M=z\theta$ 個の粒子が存在すると期待される。隣り合う吸着サイトに吸着した２つの粒子間に $-w(w>0)$ の相互作用エネルギーが発生すると、１つの吸着原子のエネルギーは、近似的に $-\varepsilon-u\theta$ とおくことができる。ここで、$u=zw/2$ であり、分母の 2 は相互作用を 2 重に数えないためである。

(4) 前問 (1)〜(3) と同様にして、θ と μ の関係式を導き、$\lambda_\mu=e^{\beta(\varepsilon+\mu)}$ を θ の関数として求めよ。

(5) λ_μ を θ の関数としてグラフに描くと、ある T_{C} より高い温度と低い温度では、グラフの様子が定性的に異なる。この温度 T_{C} を求めよ。次に、この結果を参考にして、$T>T_{\mathrm{C}}$、$T<T_{\mathrm{C}}$ それぞれの場合について、θ を μ の関数としてグラフに描け。