平成１９年度自然科学研究科
博士前期課程学力検査問題
(理化学専攻・物理学系)

専門科目 (物理学)

試験時間 12:30 ～ 16:30

注意事項

1. 問題 I, II, III, IV すべてを解答すること。
2. 解答は, 各問題ごとに別の答案用紙を使用し, 1 枚の答案用紙に複数の問題の解答を書いてはいけない。
3. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号と受験番号を必ず記入すること。
4. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

質点の質量を m，位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とする。質点は $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ だけに依存するポテンシャル $V(r)$ の中を運動する。

(1) ニュートンの運動方程式より，力学的エネルギー E 及び軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$

$$E = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 + V(r)\,, \qquad \boldsymbol{L} = m\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\,, \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

が保存することを示せ。

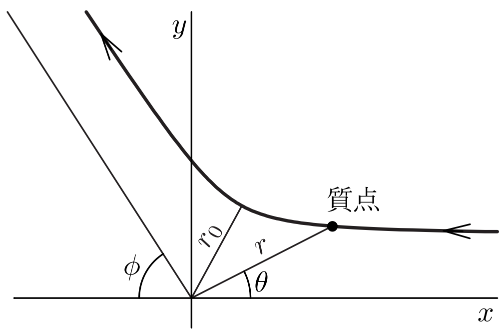
$\boldsymbol{L}$ が保存することから質点は平面上で運動する。この平面を xy 平面とする。$z = 0$ である。

(2) 極座標を用いて $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする。E 及び $\boldsymbol{L}$ の z 成分 L を極座標で表せ。

(3) 次式が成り立つことを示せ。複号は $dr/dt > 0$ のとき $+$，$dr/dt < 0$ のとき $-$ である。

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm\frac{L}{r^2\sqrt{2m\,(E - W(r))}}\,, \quad \text{ただし} \quad W(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

以下では V_0 を正の定数として $V(r) = V_0/r$ の場合，質点が無限遠方から入射し無限遠方に飛び去る散乱を扱う。$E > 0$ である。また，簡単のため $L > 0$ とする。$L = 0$ は $L \to 0$ の極限と見なせばよい。下図に軌道の概略を示す。



(4) 質点が原点に最接近する距離 r_0 を求めよ。

(5) 図に示したように，質点は $r \to \infty$，$\theta \to 0$ から入射して $r = r_0$ に到達し，その後 $r \to \infty$，$\theta \to \pi - \phi$ に散乱する。**(3)** より $\tan(\phi/2)$ を求めよ。必要なら次の積分を用いてよい。

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - bx - c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\tan^{-1}\frac{bx/2 + c}{\sqrt{c\,(x^2 - bx - c)}} + \text{積分定数}$$

(6) r_0 を ϕ で表すと $r_0 = \dfrac{V_0}{2E}f(\phi)$ になる。$f(\phi)$ を求め r_0 を ϕ の関数として概略を図示せよ。ただし $0 \leq \phi \leq \pi$ である。

(7) E と V_0 を与えたとき，r_0 が最小になる場合の軌道の概略を図示せよ。

II

半径 a の円板状の極板を間隔 x 離しておいた平行平板コンデンサーがある。図1に示すようにコンデンサーの両極板間に起電力 V の電池をつなぎ, 負極を接地し真空中においた。以下の問いに答えよ。ただし, 真空の誘電率を ε_0 透磁率を μ_0 とし, また a は x に対して十分に大きく端の影響は考えなくてもよい。

(1) コンデンサー内部に生じる電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさを求めよ。

(2) コンデンサーの静電容量を求めよ。

上記コンデンサーの極板間に, 極板と同じ形（半径 a の円形）の底面を持ち, 高さ x の円柱状誘電体を挿入する。このとき, コンデンサーの正極側 にσ, 負極側に $-\sigma$ の面密度の電荷が誘起された。ただし, この誘電体の誘電率は直線的に変化し, 接地側 ε_1, 正極側 ε_2,$(\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$ の値を持つとする（図2参照)。

(3) 極板間で電束密度が一定であることに注意して, コンデンサーの底面から y（$0 \leq y \leq x$）の位置における電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさを求めよ。

(4) 誘電体を挿入した状態のコンデンサーの静電容量を求めよ。

一度挿入した誘電体を取り除き, コンデンサーを図1の状態に戻す。次に時刻 t から微小な時間 Δt の間に極板の間隔を $x(t)$ から微小な間隔 Δx だけゆっくり拡げる場合を考える。この間, 極板間の電場は空間的に一様であるとする。

(5) コンデンサーの極板間には磁場が発生している。その理由を 20 文字程度で述べよ。

(6) 図1に示されるコンデンサーの中心軸から距離 r（$r < a$）の点 P における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の方向とその大きさを求めよ。

(7) 空間の任意の曲面から単位時間あたりに流出する電磁場エネルギー密度はポインティング・ベクトル

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$$

で与えられる。上記コンデンサーから Δt の間に流出する電磁場のエネルギーを求めよ。

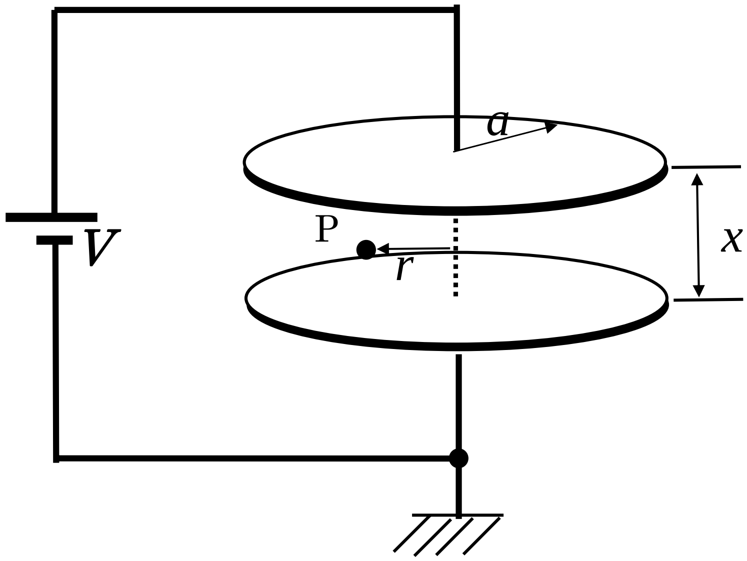


図 1

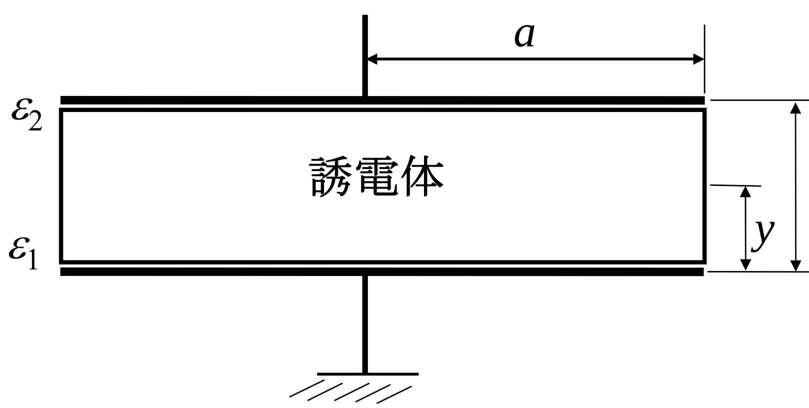


図 2

III

質点がクーロンポテンシャルに束縛され定常状態にあるとして以下の問いに答えよ。

適当な単位系を用いると，ハミルトニアンとシュレディンガー方程式は

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{\boldsymbol{L}^2}{r^2}\right) - \frac{1}{r}, \quad H\varphi(\boldsymbol{r}) = E\varphi(\boldsymbol{r})$$

で与えられる。ここで $\boldsymbol{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ は軌道角運動量の２乗である。

$\varphi(\boldsymbol{r}) = R_\ell(r)Y_\ell{}^m(\theta,\phi)$ とおき変数分離すると，動径方程式がえられる。ただし規格化された $Y_\ell{}^m(\theta,\phi)$ は，$\ell = 0, 1, 2, \cdots, -\ell \leqq m \leqq \ell$ を満たす整数 ℓ, m にたいし

$$\boldsymbol{L}^2 Y_\ell{}^m(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)Y_\ell{}^m(\theta,\phi), \qquad L_z Y_\ell{}^m(\theta,\phi) = mY_\ell{}^m(\theta,\phi)$$

をみたす。ここで

$$\rho = \sqrt{8|E|}r, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{1}{2|E|}}$$

とおき, 改めて動径波動関数を $R_\ell(\rho)$ とすると

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}\rho - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4}\right)R_\ell(\rho) = 0$$

となる。

(1) ρ が小さいとき $R_\ell(\rho)$ がみたす簡単化した方程式を書け。つぎに ρ が 0 に近づくときの解の漸近形 $F_\ell(\rho)$ を求めよ。

(2) ρ が大きいとき $R_\ell(\rho)$ がみたす簡単化した方程式を書け。つぎに $\rho \to \infty$ のときの解の漸近形 $G_\ell(\rho)$ を求めよ。

$R_\ell(\rho) = F_\ell(\rho)G_\ell(\rho)v_\ell(\rho)$ と仮定すると，v_ℓ は

$$\rho\frac{d^2}{d\rho^2}v_\ell + (2\ell + 2 - \rho)\frac{d}{d\rho}v_\ell + (\lambda - \ell - 1)v_\ell = 0$$

を満たす。

(3) $v_\ell(\rho)$ は最高次が１次以下の多項式であるとして，解およびそのときの λ を求めよ。規格化は不要である。

(4) $\ell = 0$ の下から２番目の解と $\ell = 1$ の一番低い解とは縮退していることを示せ。

さて，いま考えている質点がスピン $s=1/2$ をもちハミルトニアンに小さいポテンシャル $A\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{s}$ が加わるとする。スピン波動関数 $\chi_\pm$ は

$$\boldsymbol{s^2}\chi_\pm=\frac{3}{4}\chi_\pm, \qquad s_z\chi_\pm=\pm\frac{1}{2}\chi_\pm$$

を満たす。また全角運動量は $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{s}$ と表され以下が成り立つ。

$$\boldsymbol{J^2}\mathcal{Y}^M_{J,\ell}=J(J+1)\mathcal{Y}^M_{J,\ell} \qquad J_z\mathcal{Y}^M_{J,\ell}=M\mathcal{Y}^M_{J,\ell}$$
$$\boldsymbol{J}^2=(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{s})^2=\boldsymbol{L}^2+2\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}^2$$

(5) ℓ が与えられたとき可能な J の値を書け。

(6) $\boldsymbol{J^2}, J_z$ の固有状態で $M=J,\ \ell=1$ の場合を考える。波動関数 $\mathcal{Y}^{M=J}_{J,\ell=1}$ を，軌道角運動量の固有状態（波動関数 Y^m_ℓ）とスピンの固有状態（波動関数 $\chi_\pm$）を用いて書け。ただし

$$L_-Y^m_\ell=\sqrt{(\ell+m)(\ell+1-m)}Y^{m-1}_\ell, \quad L_-=L_x-iL_y$$

を用いて計算すること。

(7) 問 (3) で求めた解を使って表される，全てのエネルギー固有値を書け。次に，$\ell=0,1$ と制限する。$A=0$ の場合と A が小さい正の値の場合の両方のエネルギー固有値を，おおまかに，そして縮退が解ける様子が分かるように図示せよ。

IV

マクロな長さ L の細いパイプに，質量 m の原子がマクロな数 N 個 閉じ込められている。原子は，古典力学に従って，パイプの長さ方向にのみ 1 次元的な運動をする。i 番目の原子の座標を x_i，運動量を p_i として，この原子の体系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + U(x_1, x_2, \cdots, x_N) \tag{1}$$

と与えられる。$U(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ は原子間の相互作用である。パイプは，原子を閉じ込めているだけであり，原子との相互作用は無視できるとする。この体系が温度 T の熱平衡状態にある。k_B をボルツマン定数として $\beta = 1/k_\mathrm{B}T$ である。この体系の分配関数 $Z(\beta)$ は，

$$J(\beta) = \frac{1}{h^N} \int \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_N \, \exp\left[-\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} \right] \tag{2}$$

$$Q(\beta) = \frac{1}{N!} \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N \, \exp\Big[-\beta U(x_1, x_2, \cdots, x_N) \Big] \tag{3}$$

として，$Z(\beta) = J(\beta)Q(\beta)$ と与えられる。 h はプランク定数である。次の問に答えよ。

1. まず，原子間の相互作用が無視できる場合 $U(x_1, \cdots, x_N) = 0$ を考える。

(1) $J(\beta)$ を計算し，結果を $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_\mathrm{B} T}$ を用いて表せ。必要なら積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0) \tag{4}$$

を用いてよい。

(2) 体系の分配関数 $Z(\beta)$ を計算せよ。

(3) 体系のヘルムホルツの自由エネルギー

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \tag{5}$$

を計算し，結果を λ_T，L，N を用いて表せ。スターリングの公式 $\ln N! \simeq N \ln N - N$ を用いて，F の示量性が明示的となる形に整理すること。

(4) この体系の，パイプの長さ方向に対する圧力

$$P = -\Big(\frac{\partial F}{\partial L} \Big)_{T,N} \tag{6}$$

を計算し，この体系の状態方程式を求めよ。またこれを，横軸を L，縦軸を P にとり，いくつかの温度 T に対して図示せよ。

2. 次に，パイプが十分細いため，原子がパイプの中で互いの位置を入れ換えることができない場合（$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < L$）を考える。ただし，原子のサイズは無視できるほど小さいとする。また，位置を交換できないということ以外には，原子間には相互作用は働かないとする。

(1) この場合，式 (3) の $Q(\beta)$ に現われる係数 $1/N!$ は不要である。なぜか，理由を簡単に説明せよ。

(2) 体系に原子が２個だけしか存在しない場合について考えよう。原子が互いの位置を交換しない，すなわち $x_1 < x_2$ であることから，$Q(\beta)$ の積分範囲は次式のようになる。２原子系に対し

$$Q(\beta) = \int_0^L \mathrm{d}x_1 \int_{x_1}^L \mathrm{d}x_2\, e^{-\beta U} \tag{7}$$

を計算せよ。

(3) 体系に原子が３個ある場合について，$Q(\beta)$ を計算せよ。

(4) 体系に原子が N 個ある場合について，体系の分配関数 $Z(\beta)$ の式を，上の結果から推定せよ。

(5) **(4)** の結果を用いて，この体系の状態方程式を求めよ。これは，問 **1. (5)** で求めた状態方程式と一致するか。一致しない場合，その理由を簡単に記せ。

3. さて，下図のように，原子が有限の大きさを持っており，その結果 細いパイプの中で互いの位置を交換できない場合を考えよう。ここでは，原子を直径 d の剛体球と見なしてよいと仮定する。すなわち，距離 $x_{i+1} - x_i$ だけ離れた隣り合う２原子間には，相互作用

$$v(x_{i+1} - x_i) = \begin{cases} \infty & (x_{i+1} - x_i < d) \\ 0 & (x_{i+1} - x_i \geq d) \end{cases} \tag{8}$$

が働く。それ以外の相互作用は無視できるとする。計算の簡単化のため，x 座標を下図のようにとる。

(1) 体系に原子が２個しか存在しない場合，および３個しか存在しない場合のそれぞれについて，$Q(\beta)$ を計算せよ。

(2) 体系に N 個の原子が存在する場合について，体系の分配関数 $Z(\beta)$ の式を，上の結果から推定せよ。

(3) **(2)** の結果を用いてこの体系の状態方程式を求め，横軸を L，縦軸を P にとり，いくつかの温度 T に対して図示せよ。