平成１８年度
自然科学研究科 博士前期課程 学力検査問題
(理化学専攻・物理学系)

専門科目 (物理学)

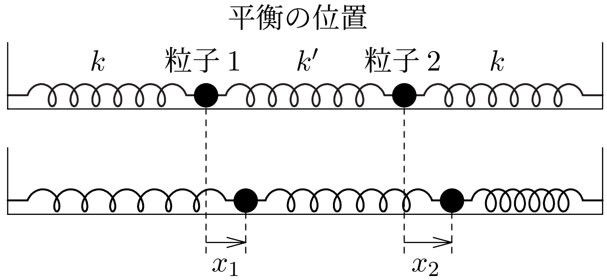
試験時間 12:30 ～ 16:30

注意事項

1. 問題 I, II, III, IV のすべてについて解答すること。
2. 各問題ごとに別の答案用紙を使用すること。1 枚の答案用紙に複数の問題の解答を書いてはいけない。また, 各問題について１枚以上解答用紙を提出すること。
3. すべての答案用紙の所定欄に, 問題番号と受験番号を記入すること。
4. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

図のように，バネ定数 k の 2 本のバネと，バネ定数 k' のバネに，同じ質量 m の 2 つの粒子が付けられている。粒子 1 の平衡の位置からの変位を x_1，粒子 2 の平衡の位置からの変位を x_2 とする。ただし，右方向への変位を正の方向とする。また，バネの質量は無視できるものとする。以下の問に答えよ。



(1) 粒子 1 および粒子 2 の運動方程式を書け。

(2) (1) で求めた運動方程式を，重心座標 $X = \frac{x_1+x_2}{2}$ および相対座標 $x = x_2 - x_1$ に対する方程式に書き直せ。

(3) 運動方程式の一般解を求めよ。そのとき，$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$ とおいて結果を簡潔に表せ。

(4) 初期条件 $x_1(0) = a, x_2(0) = 0, \frac{dx_1(0)}{dt} = 0, \frac{dx_2(0)}{dt} = 0$ を満足する解を求めよ。

次に，(4) で求めた解を用いて，$k \gg k'$ の場合にどのような現象が起こるか考えよう。

(5) $\sqrt{1+\frac{2k'}{k}} \approx 1 + \frac{k'}{k} = 1 + \epsilon$ を用いて，(4) で求めた解を近似した式を求めよ。ただし，$\epsilon\omega_0 t$ は小さいとは限らない。そして，その振る舞いの様子を，それぞれの粒子に対して横軸を t，縦軸を振幅として，$t \approx \frac{2\pi}{\epsilon\omega_0}$ 程度までグラフに描け。

必要なら，三角関数の加法定理

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

を用いてよい。

(6) (5) で求めた近似式を用いて，粒子 1 の振動エネルギー $E_1 = \frac{1}{2}m(\frac{dx_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$，および，粒子 2 の振動エネルギー $E_2 = \frac{1}{2}m(\frac{dx_2}{dt})^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$ を求めよ。このとき，$\epsilon = \frac{k'}{k}$ が小さいということを考慮し，エネルギーの振る舞いに本質的でない項は無視せよ。

(7) (6) で求めた粒子のエネルギーを，それぞれの粒子に対して横軸を t，縦軸をエネルギーとして，$t \approx \frac{2\pi}{\epsilon\omega_0}$ 程度までグラフに描け。そして，どのような現象が起こっているか簡潔に記述せよ。

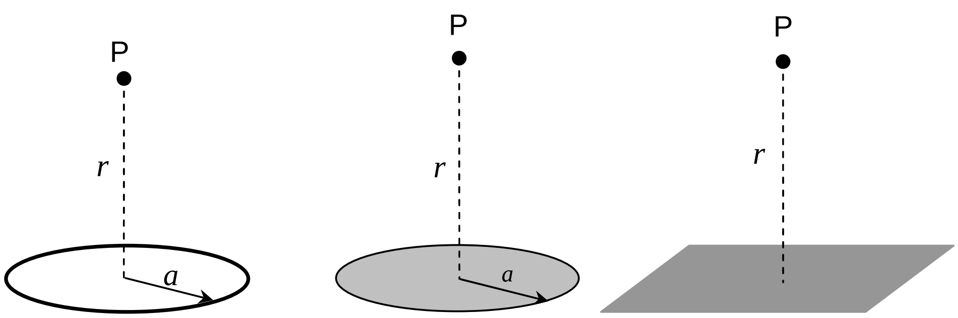
II

1. 次のそれぞれの場合において，電場の大きさと向きを求めよ。ただし，真空の誘電率を ϵ_0 とする。

(1) 半径 a の輪の上に，電荷が単位長さあたり λ $(\lambda > 0)$ で一様に分布している。輪の中心を通り輪の面に垂直な直線上で，中心から距離 r の点 P における電場（図 1 参照)。

(2) 半径 a の円板上に電荷が面密度 σ $(\sigma > 0)$ で一様に分布している。円板の中心を通り円板に垂直な直線上で，中心から距離 r の点 P における電場（図 2 参照)。

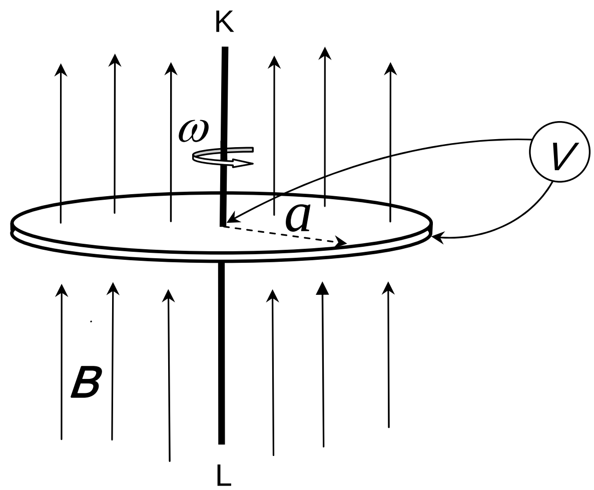
(3) 無限に広い平面上に電荷が面密度 σ $(\sigma > 0)$ で一様に分布している。その面から距離 r の点に生じる電場（図 3 参照)。



(図 1)　(図 2)　(図 3)

2. 半径 a の球の内部に全電荷 $-2q$ $(q > 0)$ の負電荷が一様に分布している。この球の中にそれぞれ電荷 q を持つ 2 個の粒子が存在する場合を考える。粒子に働く力がゼロであるためには，位置を何処にとればよいか。2 粒子の位置関係と中心からの距離を求めよ。

3. 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の一様な磁場の中で，$\boldsymbol{B}$ に垂直に置かれた半径 a の導体板が，中心軸 KL のまわりに一定の角速度 ω で回転している。円板の円周部と回転軸間に電位差 V が誘導される理由を述べよ。またその電圧の値を求めよ（図 4 参照)。ただし，導体板中の自由電子は定常状態で板と同じ角速度で回転しているとする。



(図 4)

III

次の設問 **(1)**～**(6)** に答えよ。

(1) 時間に依存する 1 次元シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H\psi(x,t)\,, \quad \text{ただし} \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x)\,, \quad p = -\,i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

を考える (m は粒子の質量)。状態 $\psi(x,t)$ における演算子 F の期待値 (平均値) $\langle\, F\,\rangle$ は

$$\langle\, F\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x,t)F\psi(x,t)\,, \quad \text{ただし} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi(x,t)|^2 = 1$$

である。F が時間に依存しないとき

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\, F\,\rangle = \langle\,[\,F\,,\,H\,]\,\rangle\,, \quad \text{ただし} \quad [\,F\,,\,H\,] = FH - HF \tag{1}$$

を示せ。なお, $V(x)$ は実数であり $x \to \pm\infty$ のとき $\psi(x,t) \to 0$ とする。

以下では, 1 次元振動子を考えることにして $V(x) = \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ とする。ω は正の定数である。

(2) 基底状態の波動関数 $\varphi(x)$ は a を正の定数として $\varphi(x) = N\exp\left(-\,ax^2\right)$ とおける。N は規格化定数である。$\varphi(x)$ を $H\varphi(x) = E\varphi(x)$ に代入し a 及びエネルギー固有値 E を求めよ。

(3) 交換関係 $[\,x\,,\,H\,]$ 及び $[\,p\,,\,H\,]$ を求めよ。また

$$[\,xp + px\,,\,H\,] = \frac{2i\hbar}{m}\Big(p^2 - m^2\omega^2x^2\Big)$$

を示せ。

(4) 次の期待値で表される量

$$\begin{aligned}
\eta_x(t) &= \langle\, x^2\,\rangle - \langle\, x\,\rangle^2\,, \qquad \eta_p(t) = \frac{1}{m^2\omega^2}\Big(\langle\, p^2\,\rangle - \langle\, p\,\rangle^2\Big) \\
\eta_{xp}(t) &= \frac{1}{m\omega}\Big(\langle\, xp + px\,\rangle - 2\langle\, x\,\rangle\langle\, p\,\rangle\Big)
\end{aligned}$$

を考える。ただし $\langle\cdots\rangle$ は **(1)** と同様に $\psi(x,t)$ での期待値を表す。式 (1) を用いると

$$\frac{d\eta_{xp}}{dt} = c_x\,\eta_x(t) + c_p\,\eta_p(t) + c_{xp}\,\eta_{xp}(t) \tag{2}$$

になる。定数 c_x, c_p, c_{xp} を求めよ。同様にして

$$\frac{d\eta_x}{dt} = \omega\,\eta_{xp}(t)\,, \qquad \frac{d\eta_p}{dt} = -\,\omega\,\eta_{xp}(t) \tag{3}$$

である。式 (3) を示す必要はない。

(5) 3 個の 1 階連立微分方程式 (2), (3) を解き $\eta_{xp}(t) = A\cos(2\omega t) + B\sin(2\omega t)$ になることを示せ。ただし, A と B は任意定数である。また, $\eta_x(t)$, $\eta_p(t)$ を求めよ。

(6) 初期条件が $\eta_x(0) = \eta_p(0)\,,\ \eta_{xp}(0) = 0$ を満たすとき $\eta_x(t)$ と $\eta_p(t)$ は時間的に一定になることを示せ。

IV

1. 質量 m の質点 N 個が間隔 a ずつあけて１次元的に並べられ，隣接する質点どうしばね定数 γ のばねでつながれた体系の，ばね方向の振動（縦波）を考える。N はマクロな数である。ここでは周期境界条件を用いる。体系の長さは $L = Na$ である。この体系の振動は，$n = 0, 1, \cdots, N-1$ として，角振動数

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\left|\sin\frac{k_n a}{2}\right| \tag{1}$$

の N 個の基準振動に分離される。$k_n = (2\pi/L)n$ は波の波数である。体系のハミルトニアンは，これを用いて

$$\mathcal{H}_N = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{p_n^2}{2m} + \frac{m\omega_n^2}{2}q_n^2\right) \tag{2}$$

と与えられる。この体系は古典力学に従うとする。この体系が温度 T の熱平衡状態にあるとして，次の問に答えよ。k_{B} をボルツマン定数として $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ である。

(1) この体系の分配関数

$$Z(N,\beta) = \frac{1}{h^N}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q_0\cdots\mathrm{d}q_{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p_0\cdots\mathrm{d}p_{N-1}\; e^{-\beta\mathcal{H}_N} \tag{3}$$

を計算せよ。h はプランク定数である。結果は，ω_n $(n = 1, 2, \cdots, N-1)$ を用いて表すこと。$n = 0$ のモードは体系の一様な並進であり，ここでは考えなくてよい。

(2) この体系の内部エネルギー

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(N,\beta)\bigg|_N \tag{4}$$

を，温度 T の関数として計算せよ。

(3) エネルギー等分配則とは何か，この問題を例にとり，５行程度までの文章で簡単に説明せよ。

2. ふたつの原子が，原子間ポテンシャル

$$U(r) \;=\; U_0\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right] \tag{5}$$

を通して相互作用している。r は２原子間の距離，U_0 と a は正の定数である。

(1) $U(r)$ は $r = a$ のとき最小値をとることを示せ。また，$U(r)$ の概形を，r を横軸にとって図示せよ。

このような原子 N 個が間隔 a ずつあけて１次元的に並べられた，鎖状の体系を考える。周期境界条件を用い，原子に順に番号 $i = 1, 2, \cdots, N$ を付ける。原子は鎖方向にのみ運動できるとし，隣接する原子間にのみ式 (5) の相互作用が働くとする。N はマクロな数である。この体系を温度 T (>0) の熱平衡状態に置くと，体系は鎖方向に一様に熱膨張する。

(2) 体系中の隣接するある2原子の原子間距離を，平衡値 $r = a$ から微小な距離 x だけ伸ばす。この2原子の原子間ポテンシャルは，x の3次まで展開して

$$U(a+x) \simeq V_0 + V_2 x^2 + V_3 x^3 \tag{6}$$

と与えられる。V_0，V_2，V_3 を，U_0 と a を用いて表せ。

(3) 体系中の隣接する2原子 i と $i+1$ の原子間距離が x_i だけ伸びるとすると，体系の全長は $\Delta L = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ だけ伸びる。ΔL のカノニカル平均は

$$\langle \Delta L \rangle = N \langle x_i \rangle = N \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_i \, x_i \, e^{-\beta U(a+x_i)} \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_i \, e^{-\beta U(a+x_i)} \tag{7}$$

と与えられる。絶対零度近傍 $T \ll U_0$ において，この $\langle \Delta L \rangle$ の式を T の最低次のべきまで評価し，結果を V_2，V_3，$k_\mathrm{B}T$，N を用いて表せ。

(4) この体系の $T \to 0$ における熱膨張係数

$$\lambda = \lim_{T \to 0} \left[\frac{1}{Na} \left(\frac{\partial \langle \Delta L \rangle}{\partial T} \right)_N \right] \tag{8}$$

を求め，結果を U_0 と k_B を用いて表せ。

(5) 前問で求めた λ の値は正である。すなわち，体系は温度の上昇によって膨張する。これは，式 (6) に非調和項 $V_3 x^3$ が含まれているためである。非調和項があるとどうして体系は膨張するか，その直感的理由を，数行から5行程度までの文章で簡単に説明せよ。必要なら図を用いてよい。

（注）以下の数学公式は，必要なら証明なしに用いてよい。a，b，c は，正の定数である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, a^{-3/2} \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \, a^{-5/2} \tag{11}$$

$b/\sqrt{c} \ll 1$ として，a が $1/\sqrt{c}$ のオーダーの大きさを持つとき，

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, e^{-c\,(x^2 - b\,x^3)} \, \mathrm{d}x \simeq \int_{-a}^{a} f(x) \, (1 + c\,b\,x^3) \, e^{-c\,x^2} \, \mathrm{d}x \tag{12}$$

である。