平成１７年度
自然科学研究科 博士前期課程 学力検査問題
(理化学専攻・物理学系)

専門科目 (物理学)

試験時間 12:30 ～ 16:30

注意事項

1. 問題 I, II, III, IV の全てについて解答すること。
2. 各問題ごとに別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題の解答を書いてはいけない。また，各問題について１枚以上解答用紙を提出すること。
3. 全ての解答用紙の所定欄に, 問題番号と受験番号を記入すること。
4. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

1. 質量 m の質点が一様な重力（重力加速度を g とする）を受けて鉛直方向に運動する。質点には速度に比例する空気抵抗が働くものとする（比例係数を k とする)。

(1) 質点の運動方程式を書け。

十分高い位置から質点を落下させたところ、地表に到達するころには落下速度はほとんど一定であった。

(2) このときの質点の速さを求めよ。

(3) このとき空気抵抗によって単位時間に失われる力学的エネルギーを求めよ。

その後，質点は地表に完全弾性衝突して跳ね返った。

(4) 質点が地表に衝突したのちの最高点の地表からの高さを求めよ。

2. 空気抵抗や重力の影響が無視できる場合のロケットの運動を考える。簡単化して、ロケットはその質量の一部をロケットから見て一定の速さ u で真後ろに放出することによって推力を得るものとする。このとき、質量を後方に放出してロケットはどんどん軽くなり、また速さも増す。そこで、ロケットの速さとそのときのロケットの質量との関係を求めたい。以下では、ある慣性系をとってその慣性系で見た速度を考える。

(1) ロケットが速さ v で前進しているとき、放出される質量の速さはいくらか？

速さ v で前進している質量 m のロケットがその質量の一部を放出して質量が $m + \Delta m$，速さが $v + \Delta v$ になったとする。（従って、$\Delta m < 0$）

(2) この放出の過程の前後で、ロケットと放出された部分をあわせた全体の運動量は保存するかしないか答えよ。また全体の運動エネルギーは保存するかしないか答えよ。

(3) $\Delta m \to 0$ の極限を考えて m を変数とした v の微分方程式を導け。

(4) この微分方程式を解いて質量と速度の関係を求めよ。ただしロケットの質量が m_0 のとき、ロケットの速さは v_0 であったとする。

II

以下の問に答えよ。解答にはカーテシアン座標，円柱座標，球座標のいずれを用いても良いが，座標変数はカーテシアン座標では x, y, z を，円柱座標では ρ, ϕ, z を，球座標では r, θ, ϕ を用いること。

1. xy 平面上に無限に広い接地された導体板があり，$(x, y, z) = (0, 0, d)$ $(d > 0)$ の点に点電荷 q $(q > 0)$ が固定されている。

(1) $z > 0$ の任意の点での電位を求めよ。

(2) 導体板上の任意の点における誘導電荷の面密度を求めよ。

(3) 前問の結果を全導体板上で積分することによって，全誘導電荷量を求めよ。

(4) 向きが $+z$ 方向で大きさが $2qd$ である電気双極子ベクトル $\boldsymbol{p}$ を用いると，$z > 0$ である十分遠方の任意の点の電位は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

と表せることを示せ。

2. 質量 m，電荷 $q\,(q > 0)$ の点電荷が xy 平面内で座標原点を中心に半径 a，角速度 ω で等速円運動をしている。

(1) 角運動量の大きさ J，および，この点電荷の円運動を円電流と見なした場合の電流 I を m, q, a, ω で表せ。

(2) 円電流に対しては，磁気双極子ベクトルの大きさ μ は (円の面積) $\times$ (電流) である。磁気双極子ベクトルと角運動量の大きさの比 μ/J を，m と q を用い ω や a を用いないで表せ。

次に半径 a，質量 m で電荷 q が一様に分布した円環を考える。

(3) この円環が座標原点を中心として xy 面上に置かれ，一定の角速度 ω で z 軸のまわりに回転するとき，比 μ/J は，前問で求めた量の何倍になるか。

次に半径 a，質量 m の一様な円板を考える。この円板の周縁に電荷 q が一様に分布している。

(4) この円板が座標原点を中心として xy 面上に置かれ，一定の角速度 ω で z 軸のまわりに回転するとき，比 μ/J は，前問で求めた量の何倍になるか。

一般に，閉電流が任意の点に作るベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は，電流に沿った線積分によって次のように表される。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

ここで $\boldsymbol{r}'$ は電流要素の位置ベクトルである。

（5） 円電流によって作られるベクトルポテンシャルが，磁気双極子ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ を用いて十分遠方で

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

と表されることを示せ。

III

1. 質量 m の粒子に対するシュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\psi(x)=E\,\psi(x) \tag{1}$$

ただし

$$V(x)=\begin{cases} +\infty\,, & x\le 0 \\ -\dfrac{\hbar^2 v_0}{2m}\,\delta(x-a)\,, & x>0 \end{cases}$$

を考える。ここで, v_0, a は正の定数, $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。

(1) $x=a$ では, 波動関数 $\psi(x)$ は連続であるが導関数 $d\psi/dx$ は不連続になる。

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=a-\varepsilon}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=a+\varepsilon}=v_0\psi(a)$$

になることを示せ。ただし $\varepsilon\to+0$ である。

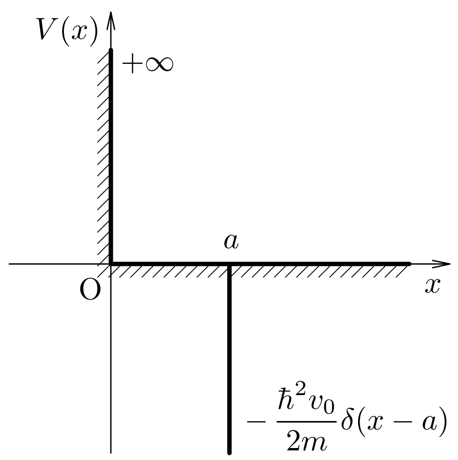
(2) 束縛状態を考えることにして $E<0$ とする。$x\neq a$ での (1) 式の一般解 $\psi(x)$ を

$$k=2a\sqrt{-2mE/\hbar^2}$$

を用いて表せ。

(3) $x=0$, $x=a$, $x\to\infty$ での境界条件から k は $\dfrac{1}{v_0 a}\,k=1-e^{-k}$ で決まることを示せ。

(4) 束縛状態が存在する条件を求めよ。



2. $\boldsymbol{\sigma}$ をパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とし, ハミルトニアン H が

$$H = -\hbar\omega\,\sigma_x\,, \qquad \omega \text{ は正の定数}$$

で与えられるとする。

(1) σ_y の固有値 m は $m = \pm 1$ になることを示せ。また, σ_y の規格化された固有状態を求めよ。

(2) 時間に依存するシュレディンガー方程式を解き, 時刻 t における状態 $\psi(t)$ を求めよ。ただし, 初期条件として $\psi(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

(3) 時刻 t において σ_y の固有値が m (ただし $m = \pm 1$) である確率 $P_m(t)$ を求めよ。

(4) 時刻 t における σ_y の期待値を求めよ。

IV

量子論的調和振動子のエネルギー固有値は、$n\ (=0,1,2,\cdots,\infty)$ をその量子数として

$$\varepsilon_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{1}$$

と与えられる。この振動子がマクロな数 N 個集まった体系が、温度 T の熱平衡状態にある。振動子間の相互作用は無視できるとして、次の問に答えよ。k_B をボルツマン定数として $\beta = 1/k_\mathrm{B}T$ である。

1. この体系の分配関数 $Z(\beta, N)$ を計算せよ。

2. この体系の内部エネルギー

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta, N) \tag{2}$$

を温度 T の関数として求めよ。

3. この体系の熱容量

$$C_N = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_N \tag{3}$$

を温度 T の関数として求めよ。

4. 前問で求めた C_N について、その高温極限 $T\to\infty$ での値を求めよ。また、絶対零度から高温極限までの C_N の温度依存性の概形を、温度 T を横軸にして図示せよ。

さて、弾性波とか電磁波といった波動場が、一辺 L のマクロな大きさの箱（体積 $V=L^3$）の中に閉じ込められ、温度 T の熱平衡状態にある体系を考える。波動場は、様々な振動数を持つ調和振動子（基準振動）の集まりと考えることができる。量子論を仮定し、$\mathbf{k}$ を基準振動子の番号、$\omega_\mathbf{k}$ をその振動数とすれば、この体系の微視的全エネルギーは

$$E(\{n_\mathbf{k}\}) = \sum_\mathbf{k} \hbar\omega_\mathbf{k}\left(n_\mathbf{k}+\frac{1}{2}\right) \tag{4}$$

である。ここで $n_\mathbf{k}$（$=0,1,2,\cdots,\infty$）は $\mathbf{k}$ 番基準振動子のとる量子数であり、体系の微視状態はその組 $\{n_\mathbf{k}\}$ で指定される。また $\mathbf{k}$ は、波数ベクトルの意味を持ち、周期境界条件を使えば

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(\nu_x,\nu_y,\nu_z), \qquad \nu_x,\nu_y,\nu_z = 0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{5}$$

という値をとる。この波動場の状態密度を、式

$$\rho(\omega) = \sum_\mathbf{k}\delta(\omega-\omega_\mathbf{k}) \tag{6}$$

で定義する。$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。

5. この体系の分配関数

$$Z(\beta, V) = \sum_{\{n_\mathbf{k}\}} e^{-\beta E(\{n_\mathbf{k}\})} \tag{7}$$

の対数は

$$\ln Z(\beta, V) = -\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \rho(\omega) \left[\frac{1}{2}\hbar\omega\beta + \ln\left(1 - e^{-\hbar\omega\beta}\right) \right] \tag{8}$$

と表されることを示せ。

6. この体系の内部エネルギー E と熱容量 C_V を計算せよ。結果は、$\rho(\omega)$ を用い、ω に関する積分で表すこと。

いま考えている波動場が、分散関係

$$\omega_{\mathbf{k}} = c\,|\mathbf{k}|^s, \qquad |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \tag{9}$$

を持つとする。c と s は正の定数である。

7. この波動場の状態密度 $\rho(\omega)$ を、式 (6) の $\mathbf{k}$ の和を積分に置き換えて計算し、その ω 依存性が

$$\rho(\omega) \propto \omega^{3/s-1} \tag{10}$$

と与えられることを示せ。

8. ３次元空間に閉じ込められた熱平衡状態にある電磁波（黒体輻射）の内部エネルギーは、絶対温度の 4 乗に比例する（シュテファン・ボルツマンの法則)。前問までの結果を利用してこれを導け。零点エネルギーの項は無視してよい。

9. ３次元固体の格子振動による熱容量は、十分低温では絶対温度の 3 乗に比例する（デバイの T^3 則)。しかし、ある程度温度が高くなると、この法則には従わなくなる。従わなくなる理由を、数行程度の文章で簡単に説明せよ。必要なら図を用いてもよい。式を導く必要はない。