平成１５年度自然科学研究科
博士前期課程学力検査問題
(理化学専攻・物理学系)

専門科目 (物理学)

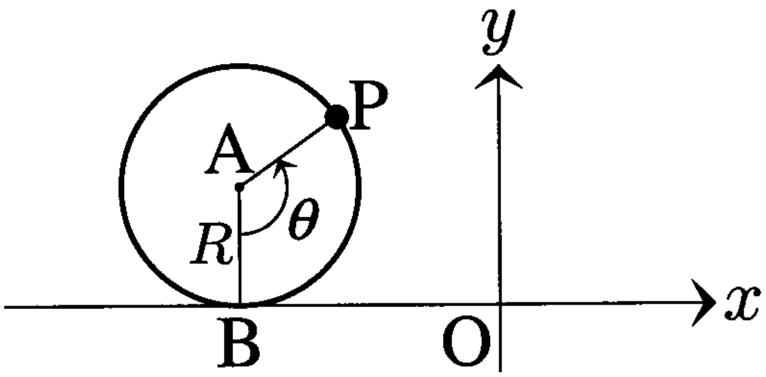
試験時間 12:30 ～ 16:30

注意事項

1. 問題 I, II, III, IV すべてを解答すること。
2. 解答は, 各問題ごとに別の答案用紙を使用し, 1 枚の答案用紙に複数の問題の解答を書いてはいけない。
3. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号, 受験番号および氏名を必ず記入すること。
4. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

質量 M、半径 R の円環があり、その円周上の点 P に質量 m の質点が固定されている。時刻 $t=0$ で点 P は水平面に接していたとし、その位置を原点 O とする。この全質量 $m+M$ の剛体が、図のように水平な x 軸上を、直立したまますべらずに転がる。また、鉛直上向きに y 軸をとる。重力加速度を鉛直下向きに大きさ g であるとして、以下の問いに答えよ。なお、各時刻で円環中心を点 A、円環と水平面の接点を点 B と表し、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を反時計回りに θ とする。



1. 全質量 $m+M$ の剛体の重心と点 A の間の距離 r を m, M 及び R を用いて表せ。

2. 剛体の重心の座標を (x_c, y_c)、剛体が点 B で水平面から受ける抗力の x 成分（摩擦力に相当する）と y 成分をそれぞれ F_x、F_y とする。剛体の重心の運動方程式を F_x と F_y を用いて表せ。

3. 点 A を通り x-y 平面に垂直な軸（円環の中心軸）に関する全質量 $m+M$ の剛体の慣性モーメントを求めよ。

4. 円環の中心軸に平行で剛体の重心を通る軸（剛体の重心軸）に関する剛体の慣性モーメントを I_c とする。
$$I_c = \frac{M(2m+M)}{m+M}R^2$$
であることを示せ。

5. 剛体の重心に関する、剛体に働く力のモーメント（トルク）を F_x と F_y を用いて表せ。

6. 剛体の重心軸のまわりの回転の角速度は、円環の中心軸のまわりの回転の角速度に等しい。このことを用いて、剛体の重心のまわりの剛体の回転運動の方程式を F_x と F_y を使って表せ。

7. 剛体が水平面上をすべらないことから点 B の x 座標は $-R\theta$ と表される。これを用いて、重心の座標 (x_c, y_c) を θ で表せ。

8. 前問までの結果を使って、θ の満たす微分方程式を F_x や F_y を用いずに表せ。

9. 角度 θ と角速度がともに小さいときの剛体の運動について述べよ。

II

真空中の誘電率を ε_0、透磁率を μ_0 として、以下の問い（**1.** 〜 **3.**）に答えよ。

1. 内半径 a 、外半径 b の中空な球殻に電荷 Q が一様に分布している。球殻の中心から距離 r の位置の電場の強さを求めよ。

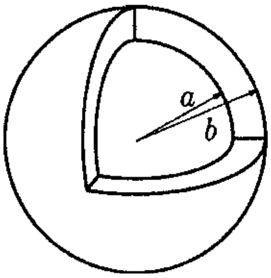


図１．球殻の様子

2. ２辺の長さが $2a$, $2b$ の長方形の導線回路（コイル）に電流 I が流れている。

(1) 図２のようにコイルを x-y 平面上に置き、コイルの中心を通る垂線を z 軸に取る。z 軸上の任意の点 $(0,0,z)$ における、コイルが作る磁場の強さを求めよ。

(2) このコイルを、x-z 平面内で磁場の向きが z 軸に対して角度 θ 傾いている一様な磁場 $\boldsymbol{H} = (H\sin\theta, 0, H\cos\theta)$ 中に静かに置いた（図３）。磁場がコイルに与える偶力の大きさを求めよ。またコイルの各辺の長さの和が一定の時、最大の偶力を受けるコイルの形はどのような形か述べよ。

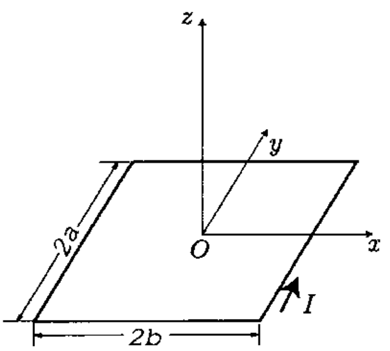


図２：コイル内を流れる電流 I と座標

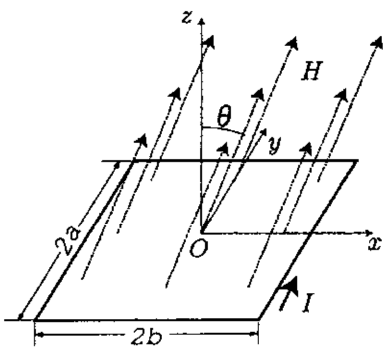


図３：コイルと付加された磁場 $\boldsymbol{H}$

3. 真空中を z 方向に進行する平面電磁波における電場、磁場は、z と t のみの関数であり、次式で与えられる。

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \, e^{ik(z-ct)} \\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \, e^{ik(z-ct)} \end{cases}$$

ただし、$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$ は定数ベクトル、c は光速である。

(1) 次式が成り立つことを示せ。また、これが波のどのような性質を表しているのか簡潔に述べよ。

$$\begin{cases} E_z = 0 \\ H_z = 0 \end{cases}$$

(2) $|\boldsymbol{E}_0|$ と $|\boldsymbol{H}_0|$ の比を求めよ。

(3) $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} = 0$ が成り立つことを示せ。

III

ある分子はスピンを持つ3つの原子を含んでおり、そのスピンの間には

$$H = -4J\,(S_{1z}\cdot S_{2z} + S_{2z}\cdot S_{3z} + S_{3z}\cdot S_{1z})$$

で表される相互作用が働いている。ここで J は正の定数である。また、S_{jz} は j 番目の原子のスピンの z 軸方向成分であり、$+\frac{1}{2}$ および $-\frac{1}{2}$ の2つの固有値をとり得る。それぞれの固有値に対応して、原子のスピンが z 方向または $-z$ 方向を向いているという。（上記の H は Ising Hamiltonian と呼ばれている。）

この（3原子から成る）分子1つあたりの分配関数を ζ としよう。今、この分子 N 個が結晶の各格子点に固定されていて、分子間の相互作用が無視でき、全系の分配関数 Z が ζ^N で表されるとする。体系は温度 T の熱平衡状態にあるとし、ボルツマン定数を k_B として、以下の問いに答えよ。

1. 分子1つについて、エネルギー固有値とその縮退度を書け。

2. 分子1つあたりの分配関数 ζ を J, k_B, T で表せ。

3. 全系のヘルムホルツの自由エネルギー F を J, k_B, T, N で表せ。

4. 全系の平均エネルギー $\bar{E}$ を J, k_B, T, N で表せ。

5. 全系のエントロピー S を J, k_B, T, N で表せ。

6. 高温極限 $\frac{J}{k_BT} \to +0$ での全系のエントロピーを求め、その意味を簡単に2行程度で説明せよ。

7. 温度 T が J/k_B に等しい場合、3原子のスピンが同じ方向を向いている状態にある分子の数は全体の分子数 N 個の何%と考えられるか。その数値を有効数字2桁で求めよ。

必要あれば、次の数値を用いてよい。

$$e = 2.72,\ e^2 = 7.39,\ e^3 = 20.1,\ e^4 = 54.6,$$
$$\log_e 2 = 0.693,\ \log_e 3 = 1.10,\ \log_e 5 = 1.61,\ \log_e 7 = 1.95$$

IV

簡単のため $\hbar=1$、質量 $m=1$、角振動数 $\omega=1$ とすると、1次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}x^2$$

と書ける。なお、以下において必要なら $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Ax^2}dx=\sqrt{\pi/A}$ （ただし $A>0$）を使ってよい。

1. 消滅演算子 a は $(x+\frac{d}{dx})/\sqrt{2}$ と表される。生成演算子 $a^\dagger$ を x と $\frac{d}{dx}$ を用いて書け。また、ハミルトニアンを生成・消滅演算子で表せ。ただし、常に生成演算子は消滅演算子の左側に来るようにすること。

2. 1次元調和振動子の基底状態 $\phi_0(x)$ は $a\,\phi_0(x)=0$ で与えられる。規格化された基底状態の波動関数 $\phi_0(x)$ を求めよ。

3. 第一励起状態 $\phi_1(x)$ は $a^\dagger\phi_0(x)$ で与えられる。その波動関数 $\phi_1(x)$ を求めよ。

2次元等方調和振動子のハミルトニアンは

$$H=\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}x^2\right)+\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}y^2\right)$$

と書ける。H は生成（消滅）演算子 $a_x^\dagger$ (a_x) 等を用いると問 **1.** のハミルトニアンと類似した形に書ける。$a_x^\dagger a_x$, $a_y^\dagger a_y$ は非負の整数固有値を持つ。

4. この系の基底状態、第1励起状態、第2励起状態はそれぞれ何個あるか答えよ。

5. この系の基底状態の波動関数を極座標 (r,θ) を用いて書け。

6. 角運動量演算子は、$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ で与えられる。この角運動量の固有値及び固有関数を求めよ。

7. 縮退した状態の重ねあわせを考えることにより、 この系の第1励起状態を同時に角運動量の固有状態にすることができる。それらの状態の（規格化された）波動関数を全て、極座標で表せ。

8. 前問で求めた状態のうちどれか1つを選び、その状態 $\psi(\boldsymbol{r})$ の確率の流れ

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\mathrm{Re}\left[\psi^*(\boldsymbol{r})\frac{\nabla}{i}\psi(\boldsymbol{r})\right]$$

を計算せよ。